



## Übung 4

(Ausgabe: 30.10.2014 in der Vorlesung, Abgabe: 04.11.2014 in den Übungen)

### Übungsaufgaben (werden korrigiert und bewertet, zulassungsrelevant.)

- **Aufgabe 1: Magnetisches Moment des Protons und Neutrons (13 Punkte + 3 Bonuspunkte)**

Nehmen Sie an, dass das magnetische Moment des Protons durch die Rotation einer positiven, sphärischen, homogenen Ladungsverteilung  $\rho(r)$  mit Radius  $R$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um ihre Symmetrieachse beschrieben werden kann.

- a) Zeigen Sie, indem Sie über die Ladungsverteilung integrieren, dass

$$\mu = \frac{e\omega R^2}{5}!$$

(**Hinweis:** Zum Lösen des Integrals dürfen Sie auch ein Computerprogramm nutzen. Bitte geben Sie jedoch die grundlegenden Ideen an. Wählen Sie  $\omega$  entlang der z-Achse und lösen Sie das Integral in Kugelkoordinaten. Erinnerung:  $\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3r [\vec{r} \times \vec{j}]$ ,  $\vec{j} = \rho(\vec{\omega} \times \vec{r})$ ,  $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ .) (6 Punkte)

- b) Zeigen Sie, indem Sie den klassischen Zusammenhang zwischen Drehimpuls  $l$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  nutzen, dass:

$$\omega R^2 = \frac{l}{0.4 m_p}!$$

(**Hinweis:** Nehmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel an.) (2 Punkte)

- c) Nutzen Sie die Ergebnisse aus a) und b), um das aus der Vorlesung bekannte Ergebnis

$$\mu_p = \frac{e\hbar}{2m_p} \cdot l$$

zu zeigen! (2 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass die  $g$ -Faktoren für Proton und Neutron von den klassischen Erwartungen abweichen. Dies ist bereits ein Hinweis auf eine Substruktur der Nukleonen. Nehmen Sie im Folgenden für Proton und Neutron  $l=0$  an.

- d) Zeigen Sie für das magnetische Moment des negativen Pions  $\pi^-$  ( $m_{\pi^-} = 139.57 \text{ MeV}/c^2$ ) in Einheiten des magnetischen Momentes des Protons, indem Sie  $l=1$  für das Pion setzen:

$$\mu_{\pi^-} = -2.4 \mu_p! \quad (3 \text{ Punkte})$$

- e) Nehmen Sie an, dass das Neutron als ein System aus reinem Dirac-Teilchen, d.h.  $g_s=0$  und einem System aus Proton und negativen Pion, d.h.  $n=p+\pi^-$ , verstanden werden könnte. Zeigen Sie mit dem Wissen aus der Vorlesung ( $\mu_n = -0.685 \mu_p$ ), dass unter dieser

Annahme das Neutron zu 51% ein Dirac-Teilchen wäre und zu 49% als  $p+\pi^-$ -System zu verstehen wäre! (3 Bonuspunkte)

▪ **Aufgabe 2: Molekülstrahl-Experiment nach Rabi (8 Punkte)**

Werten Sie das folgende Molekülstrahl-Experiment aus. Es handelt sich um die Originaldaten aus I.I. Rabi *et al.*, Phys. Rev. **53**, 318 (1938). Es wurde ein Lithium-Chlorid-Strahl verwendet. Die notwendigen Daten und Parameter finden Sie in der Abbildung. Nehmen Sie im Folgenden an, dass Lithium zu 100% aus  ${}^7\text{Li}$  mit Kernspin  $I=3/2$  besteht.

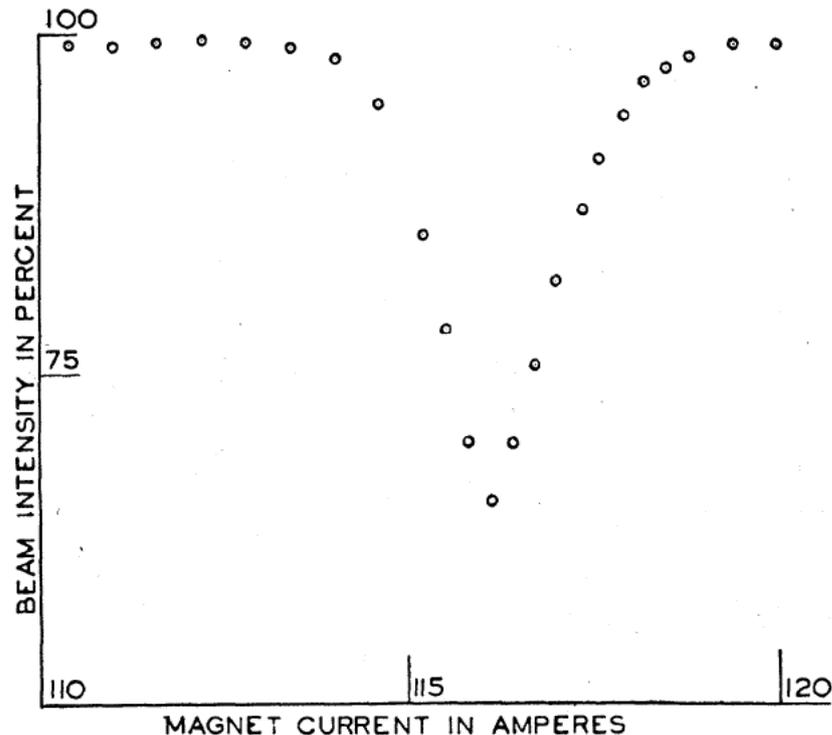


FIG. 1. Curve showing refocused beam intensity at various values of the homogeneous field. One ampere corresponds to about 18.4 gauss. The frequency of the oscillating field was held constant at  $3.518 \times 10^6$  cycles per second.

- Erklären Sie qualitativ das Messergebnis! Sieht man nur die in der Abbildung dargestellte Resonanzfrequenz? (2 Punkte)
- Berechnen Sie den  $g_I$ -Faktor und das magnetische Moment  $\mu$  in Einheiten von  $\mu_K$  für  ${}^7\text{Li}$ ! (2 Punkte)
- Wieso verwendet Rabi in seinem Experiment einen LiCl-Strahl und nicht etwa einen  ${}^7\text{Li}$ -Atomstrahl oder einen  ${}^7\text{Li}$ -Ionenstrahl? (2 Punkte)
- Könnte man auch das Magnetfeld  $B$  festhalten und die Frequenz der eingestrahlten Hochfrequenz variieren, um  $g_I$  und  $\mu$  zu bestimmen? (1 Punkt)
- Wieso geht die Intensität im Minimum nicht auf 0 zurück? (1 Punkt)

▪ **Aufgabe 3:  $\alpha$ -Zerfall von  ${}^{242}\text{Pu}$  (9 Punkte)**

- Der  $Q$ -Wert für den  $\alpha$ -Zerfall von  ${}^{242}\text{Pu}$  aus seinem Grundzustand in den Grundzustand des Tochterkernes beträgt  $Q_\alpha=4985$  keV. Um welchen Tochterkern handelt es sich und welche Energie erwarten Sie für das emittierte  $\alpha$ -Teilchen? (2 Punkte)
- Zusätzlich zum ersten gemessenen  $\alpha$ -Teilchen wurde ein zweites  $\alpha$ -Teilchen mit einer Energie von  $E_\alpha=4857$  keV im  $\alpha$ -Zerfall von  ${}^{242}\text{Pu}$  gemessen. Was verrät Ihnen dieses zweite  $\alpha$ -Teilchen über den Tochterkern? (2 Punkte)

- c) Zeigen Sie mit Hilfe der Weizsäcker'schen Massenformel, dass für die beim  $\alpha$ -Zerfall frei werdende Energie  $Q_\alpha$  im Fall von großem  $A$  und  $Z$  gilt:

$$Q_\alpha = -4a_V + \frac{8}{3}a_S + \frac{4a_C Z \left(1 - \frac{Z}{3A}\right)}{A^{\frac{1}{3}}} - \frac{a_A(A - 2Z)^2}{A^2} + B_\alpha.$$

Berechnen Sie  $Q_\alpha$  für die gg-Uran-Isotope  $^{222}\text{U}$  bis  $^{238}\text{U}$  und tragen Sie  $Q_\alpha$  gegen die Massenzahl  $A$  auf! Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den tatsächlich gemessenen Werten! Die experimentellen Werte finden Sie auf <http://www.nndc.bnl.gov/chart>, wenn Sie nach dem jeweiligen Kern suchen.

(**Tipp:** Taylorentwicklung für Terme der Form  $(1 \pm x)^m \approx 1 \pm m \cdot x$  verwenden. Paarungsterm entfällt, weil  $d$  beim  $\alpha$ -Zerfall erhalten bleibt. Die Bindungsenergie des  $\alpha$ -Teilchens beträgt  $B_\alpha=28.3$  MeV.) (5 Punkte)

### Einfache Fragen (Diskussionsbasis – unbewertet, werden nicht korrigiert)

- **Frage 1:**  
Wie hängt der Kernspin mit dem magnetischen Moment eines Atomkernes zusammen? Vergleichen Sie das nukleare magnetische Moment mit dem atomaren magnetischen Moment! Wie beeinflusst der Kernspin die atomaren Energieniveaus?
- **Frage 2:**  
Wie groß sind die  $g$ -Faktoren von Proton, Neutron und Elektron? Warum unterscheiden sich die  $g$ -Faktoren von Proton und Elektron? Was würde man klassisch für das Neutron erwarten?
- **Frage 3:**  
Wodurch wird die Zerfallswahrscheinlichkeit eines Atomkernes gegenüber  $\alpha$ -Zerfall bestimmt?
- **Frage 4:**  
Wie sieht das Energiespektrum von  $\alpha$ -Teilchen beim  $\alpha$ -Zerfall aus? Warum weicht die Energie des  $\alpha$ -Teilchens vom  $Q$ -Wert des Zerfalls ab?

# Die originale Veröffentlichung von I.I. Rabi in Phys. Rev. 53, 318 (1938)

## A New Method of Measuring Nuclear Magnetic Moment\*

It is the purpose of this note to describe an experiment in which nuclear magnetic moment is measured very directly. The method is capable of very high precision and extension to a large number and variety of nuclei.

Consider a beam of molecules, such as LiCl, traversing a magnetic field which is sufficiently strong to decouple completely the nuclear spins from one another and from the molecular rotation. If a small oscillating magnetic field is applied at right angles to a much larger constant field, a re-orientation of the nuclear spin and magnetic moment with respect to the constant field will occur when the frequency of the oscillating field is close to the Larmor frequency of precession of the particular angular momentum vector in question. This precession frequency is given by

$$v = \mu H / h i = g(i) \mu_0 H / h. \quad (1)$$

To apply these ideas a beam of molecules in a  $^2\Sigma$  state (no electronic moment) is spread by an inhomogeneous magnetic field and refocused onto a detector by a subsequent field, somewhat as in the experiment of Kellogg, Rabi and Zacharias.<sup>1</sup> As in that experiment the re-orienting field is placed in the region between the two magnets. The homogeneous field is produced by an electromagnet capable of supplying uniform fields up to 6000 gauss in a gap 6 mm wide and 5 cm long. In the gap is placed a loop of wire in the form of a hairpin (with its axis parallel to the direction of the beam) which is connected to a source of current at radiofrequency to produce the oscillating field at right angles to the steady field. If a re-orientation of a spin occurs in this field, the subsequent conditions in the second deflecting field are no longer correct for refocusing, and the intensity at the detector goes down. The experimental procedure is to vary the homogeneous

field for some given value of the frequency of the oscillating field until the resonance is observed by a drop in intensity at the detector and a subsequent recovery when the resonance value is passed.

The re-orientation process is more accurately described as one in which transitions occur between the various magnetic levels given by the quantum number  $m_i$  of the particular angular momentum vector in question. An exact solution for the transition probability was given by Rabi<sup>2,3</sup> for the case where the variable field rotates rather than oscillates. However, it is more convenient experimentally to use an oscillating field, in which case the transition probability is approximately the same for weak oscillating fields near the resonance frequency, except that  $\vartheta$  is replaced by  $\vartheta/2$  in Eq. (13). With this replacement and with passage to the limit of weak oscillating fields, the formula becomes for the case of  $i = \frac{1}{2}$

$$P(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{\vartheta^2}{(1-q)^2 + q\vartheta^2} \sin^2 \{ \pi t r [(1-q)^2 + q\vartheta^2]^{\frac{1}{2}} \}, \quad (2)$$

where  $\vartheta$  is  $\frac{1}{2}$  the ratio of the oscillating field to the steady field,  $q$  is the ratio of the Larmor frequency of Eq. (1) to the frequency  $r$  of the oscillating field. The denominator of the expression is the familiar resonance denominator. The formula is generalized to any spin  $i$  by formula (17).<sup>2</sup>

In the theory of this experiment,  $t$ , in Eq. (2), is replaced by  $L/v$ , where  $L$  is the length of the oscillating region of the field, and  $v$  is the molecular velocity.  $P(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  must then be averaged over the Maxwellian distribution of velocities. However, the first term is not affected by the velocity distribution if  $L$  is long enough for many oscillations to take place. The average value of the  $\sin^2$  term over the velocity distribution is approximately  $\frac{1}{2}$ .

To produce deflections of the weakly magnetic molecules sufficient to make the apparatus sensitive to this effect, the beam is made 245 cm long; the first deflecting field is 52 cm in length and the second 100 cm.

We have tried this experiment with LiCl and observed the resonance peaks of Li and Cl. The effects are very striking and the resonances sharp (Fig. 1). A full account of this experiment, together with the values of the nuclear moments, will be published when the homogeneous field is recalibrated.

I. I. RABI  
J. R. ZACHARIAS  
S. MILLMAN  
P. KUSCH

Hunter College (J. R. Z.),  
Columbia University,  
New York, N. Y.  
January 31, 1938.

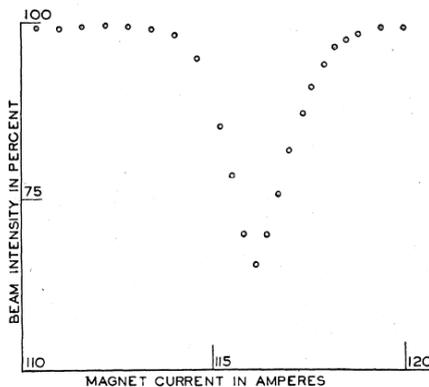


FIG. 1. Curve showing refocused beam intensity at various values of the homogeneous field. One ampere corresponds to about 18.4 gauss. The frequency of the oscillating field was held constant at  $3.518 \times 10^9$  cycles per second.

\* Publication assisted by the Ernest Kempton Adams Fund for Physical Research of Columbia University.

<sup>1</sup> Kellogg, Rabi and Zacharias, Phys. Rev. 50, 472 (1936).  
<sup>2</sup> Rabi, Phys. Rev. 51, 652 (1937).  
<sup>3</sup> C. J. Gorter, Physica 9, 995 (1936). We are very much indebted to Dr. Gorter who, when visiting our laboratory in September 1937, drew our attention to his stimulating experiments in which he attempted to measure nuclear moments by observing the rise in temperature of solids placed in a constant magnetic field on which an oscillating field was superimposed. Dr. F. Bloch has independently worked out similar ideas but for another purpose (unpublished).