

8. Mechanik von Flüssigkeiten und Gasen

30.11.2010

Aggregatzustände: FEST: $\rightarrow$ Atome in festem Gitter
(es gibt diverse
weitere Zustände) "Fernordnung"

FLÜSSIG: $\rightarrow$ "Nahordnung"

GASFÖRMIG: $\rightarrow$ Atome frei beweglich

8.1 Hydrostatik

• Druck $P = \frac{F}{A} = \frac{\text{gleichmäßig auf Oberfläche wirkende Kraft}}{\text{Fläche}}$
"pressure"

Die SI-Einheit des Druckes ist N/m^2 .

Man definiert $1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \hat{=} 1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Pa}$

Weitere Einheiten:

$1 \text{ bar} \hat{=} 1,0 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \hat{=} 1000 \text{ hPa}$ } $\sim$ mittlerer Luftdruck
 $1 \text{ Atmosphäre} \hat{=} 1 \text{ atm} \hat{=} 1,013 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ } auf 0 m

$1 \text{ Torr} \hat{=} 1 \text{ mm Hg} = 133 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ (Torricelli)

$1 \text{ PSI} \hat{=} 1 \text{ pound/square-inch} = 1 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 6,9 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Beispiel: Wieviel Druck übt ein stehender, 65 kg
schwerer Mensch mit Schuhgröße 45 auf
den Boden aus? (Auflagefläche Fuß $\sim 0,3 \text{ m} \cdot 0,09 \text{ m} = 0,027 \text{ m}^2$)

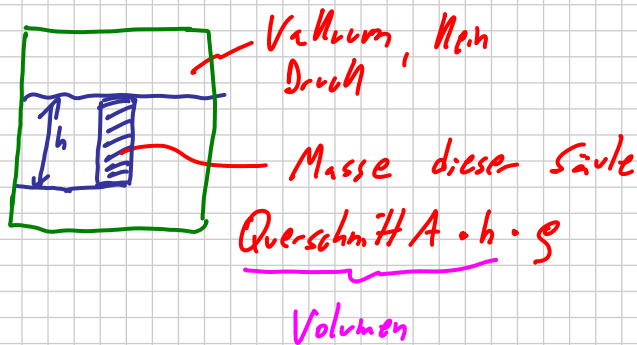
$$\checkmark \quad P = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{65 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \times 0,027 \text{ m}^2} = 12 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \sim 0,1 \text{ atm}$$

2 Füße

- Der Druck ist eine skalare Größe. In einem ruhenden Fluid ist der Druck in alle Richtungen gleich.

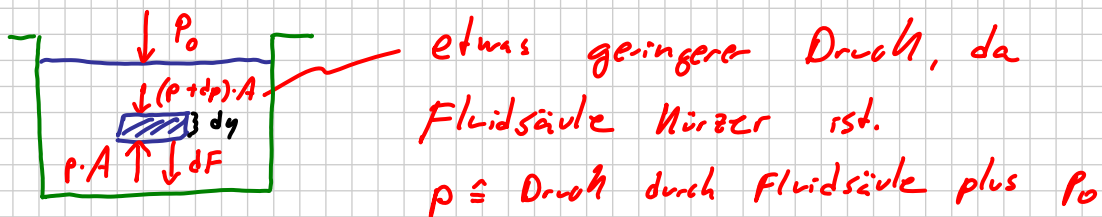


- Druck in Wassertiefe h bei konstanter Dichte ρ nur auf Grund der Wassersäule



$$p = \frac{F}{A} = \frac{\rho \cdot \cancel{A} \cdot h \cdot g}{\cancel{A}} = \rho \cdot g \cdot h$$

- Jetzt allgemeiner: inklusive zusätzlichem Druck auf die Oberfläche und variierendem ρ . Betrachte Massenelement dm:



$$dF_{\text{grav}} = dm \cdot g = \rho \cdot g \cdot dV = \rho \cdot g \cdot A \cdot dy$$

Gesamt Kraft: $F_{\text{ges}} = \underbrace{p \cdot A - (p + dp) \cdot A}_{\text{Kraft durch Druckunterschied}} - \underbrace{\rho \cdot g \cdot A \cdot dy}_{\text{Gewichtskraft}} \stackrel{!}{=} 0$

$$\frac{dp}{dy} = -\rho \cdot g$$

$$[8-1]$$

- (a) Flüssigkeit (inkompressibel), d.h. $\rho = \text{const.}$
unabhängig von der Höhe der Flüssigkeitssäule

$$\int_{p_0}^p dp = - \int_{y_1=h}^{y_2=0} \rho \cdot g \cdot dy$$

$$\Rightarrow p - p_0 = -\rho \cdot g \cdot (y_2 - y_1) = \rho \cdot g \cdot h \quad \swarrow \text{Wassertiefe}$$

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

[8-2]

Beispiel: Tauchen in 15 m Tiefe

$$p = \text{Druck an Oberfläche} + 1,0 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 15 \text{ m}$$

$$= 1013 \text{ mbar} + 1,47 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$= 2483 \text{ mbar} \approx 2,5 \text{ atm} \quad \left(\begin{array}{l} \text{pro 10 m Tiefe} \\ \Rightarrow 1 \text{ atm mehr Druck} \end{array} \right)$$

($\rho(\text{Salzwasser}) > \rho(\text{Süßwasser})$)

- (b) Gas, d.h. ρ ändert sich mit der Höhe

zur Vereinfachung: $\rho \propto p \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}$

$$p_0 = 1,013 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (\text{auf Meereshöhe, Mittelwert}) \quad (960 - 1040 \text{ hPa})$$

$$\rho_0 = 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (\text{bei } 0^\circ \text{C auf Meereshöhe})$$

aus [8-1]: $\frac{dp}{dy} = -\rho \cdot g = -\left(\frac{p}{p_0}\right) \cdot \rho_0 \cdot g$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dy \Rightarrow \int_{p_0}^p \frac{1}{p} dp = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \int_0^y dy$$

$$\Rightarrow \ln(p/p_0) = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot y$$

$$\Rightarrow p = p_0 \cdot e^{-\left(\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g\right) \cdot y}$$

[8-3]

Exponentieller Druckabfall mit der Höhe "Barometrische Höhenformel"

Beispiel: Luftdruck auf Zugspitze ($h \sim 3000 \text{ m}$)

$$p = 1013 \text{ hPa} \cdot \exp \left(- \frac{1,29 \text{ kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}^2 \cdot 9,81}{1013 \times 10^5 \text{ N}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3000 \text{ m} \right)$$
$$\approx 700 \text{ hPa} \quad (700 \text{ hPa} - \text{Fläche der Meteorologen})$$

in der Nähe der Meeresoberfläche: $1 \text{ hPa} / 8 \text{ m}$ Höhenunterschied

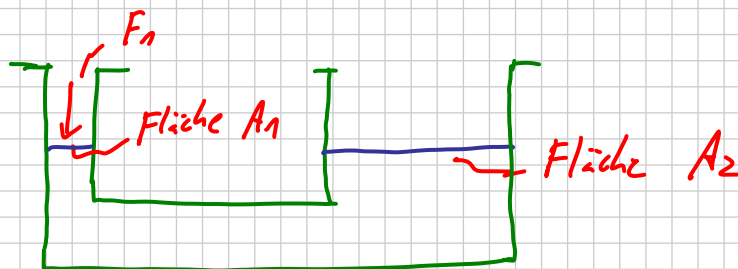
↳ auf den Spitzen des Nöhrer Doms

$$(h(\text{Nordturm}) = 157,38 \text{ m} \quad h(\text{Südturm}) = 157,31 \text{ m})$$

ist die Luft etwa 2% "dünn"

• Das Pascalsche Prinzip

"Eine Druckänderung in einer abgeschlossenen, inkompressiblen Flüssigkeit überträgt sich in gleichem Maße auf jeden Teil des Fluids und die Wände des Behälters."



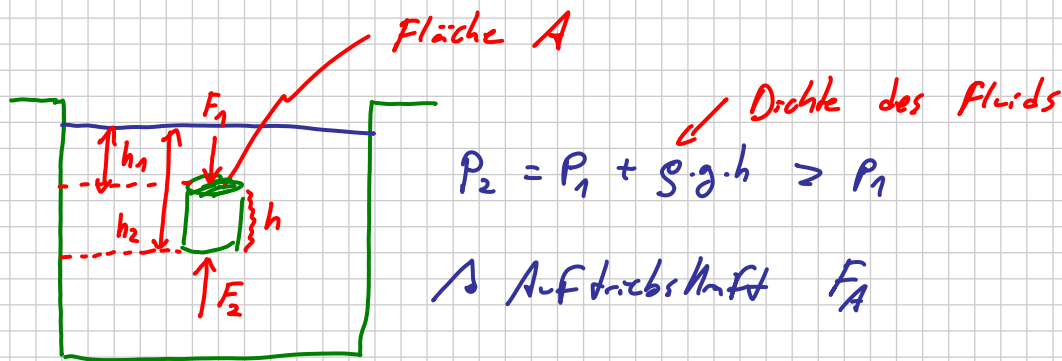
$$p_1 = \frac{F_1}{A_1}$$

$$p_2 = \frac{F_2}{A_2} \stackrel{!}{=} p_1$$

$$\hookrightarrow F_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} \right) \cdot F_1$$

(aber Weg bei F_1 ist länger $\hookrightarrow$ Arbeit $w_1 = w_2$)

• Archimedisches Prinzip - Auftrieb



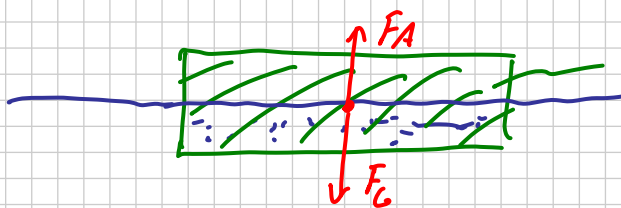
$$\rightarrow F_A = F_2 - F_1 = \rho \cdot g \cdot h \cdot A = \rho \cdot V \cdot g = m_{\text{Wasser}} \cdot g$$

Die Auftriebskraft eines Körpers in einem Fluid entspricht dem Gewicht ($m_{\text{Wasser}} \cdot g$) des vom Körper verdrängten Fluids.

Das gilt auch für Gase: Körper in Luft wiegen weniger als im Vakuum.

- Mit diesem Prinzip kann man auch die Schwimm-lage von Körpern berechnen:

01.12.2010



Gleichgewichtslage, wenn $\sum \vec{F} = 0 \rightarrow F_A = -F_G$

Beispiel: Bauernbaum, 5m lang, $\phi = 1m$, Dichte = $0,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot l = 3,9 \text{ m}^3 \rightarrow m = 2340 \text{ kg}$$

Ganz untergetaucht: ↳ Verdrängt Wassermasse =

$$3,9 \text{ m}^3 \cdot 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 = 3900 \text{ kg}$$

Steigt nach oben, bis (eingetauchtes Volumen · Dichte) = 2340 kg

ist ↳ 60% tauchen ein ($\hat{=} \rho_{\text{Baum}} / \rho_{\text{Fluid}}$)

Beispiele:

$\rho(\text{Eis}) = 917 \text{ kg/m}^3$ Achtung: Im Eisberg sind häufig noch Luftbläschen eingeschlossen

$$\rho(\text{totes Meer}) = 1200 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho(\text{Mensch, ausgeatmet}) \sim 990 - 1070 \text{ kg/m}^3$$

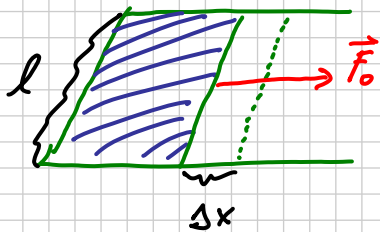
fett schlank

$$\rho(\text{Mensch, eingeatmet}) \sim 900 - 990 \text{ kg/m}^3$$

• Oberflächenspannung

Um die Oberfläche einer Flüssigkeit um ΔA zu vergrößern, muss man Moleküle aus der Flüssigkeit an die Oberfläche bringen. Δ Arbeit gegen die Bindungskräfte zwischen den Molekülen im Fluid

Oberflächenspannung $\gamma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$



$$\left. \begin{array}{l} \Delta W = F_0 \cdot \Delta x \\ \Delta A = 2 \cdot l \cdot \Delta x \end{array} \right\} \gamma = \frac{F_0}{2 \cdot l}$$

oben und unten

$$\gamma(\text{H}_2\text{O}, 20^\circ\text{C}) = 0,072 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Fluid versucht Oberfläche zu minimieren.

Beispiele:

- $\gamma(\text{H}_2\text{O})$ sinkt mit steigender Temperatur
↘ heißes Wasser wäscht besser ($\gamma(\text{H}_2\text{O}, 100^\circ\text{C}) \sim 0,059 \frac{\text{N}}{\text{m}}$)
- Spül: senkt γ (— auf $0,025 \frac{\text{N}}{\text{m}}$)
- Stecknadel / Insekt auf Wasseroberfläche



- Kapillarität

KOHÄSION: Anziehungskraft der Moleküle innerhalb des Fluids

ADHÄSION: Anziehungskraft der Fluidmoleküle zu Molekülen der Umgebung



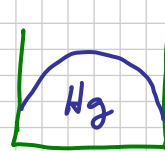
Wasser - Glas - Grenzfläche:

Adhäsion > Kohäsion

Steighöhe $h \propto \frac{\gamma}{r}$ — Radius der Kapillare

Quecksilber (Hg) - Glas - Grenzfläche:

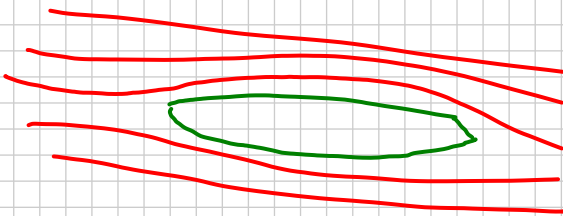
Adhäsion < Kohäsion



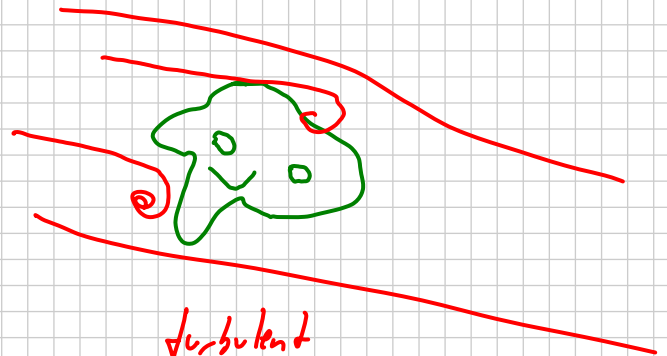
8.2 Hydrodynamik

LAMINARE STRÖMUNG: Jeder Massenpunkt des Fluids folgt einer Stromlinie, die Bahnen kreuzen sich nicht.

TURBULENTE STRÖMUNG: Unregelmäßige Wirbel



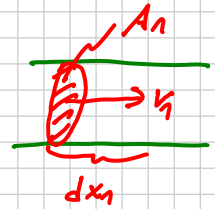
laminar



turbulent

Annahme: Inkompressibles Fluid, $\rho = \text{const.}$

Massenfluss durch Querschnitt A_1 bzw. A_2



$$\frac{dM_1}{dt} = \rho \cdot A_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho \cdot A_1 \cdot v_1$$

$$\frac{dM_2}{dt} = \rho \cdot A_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} = \rho \cdot A_2 \cdot v_2$$

Da keine Masse verlorengeht, gilt: $\frac{dM_1}{dt} = \frac{dM_2}{dt}$

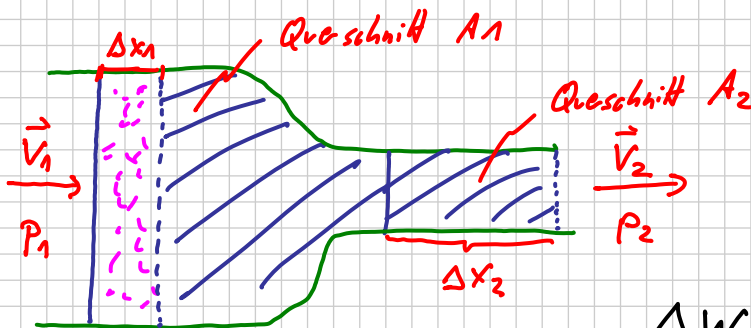
$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

[8-4]

„Kontinuitätsgleichung“

Bei kleinem Querschnitt fließt das Fluid schneller.

(Zusammendrücken eines Schlauchs, Wasserstrahl aus Wasserhahn wird dünner)



• Arbeit um Fluidvolumen

$$\Delta V = A_1 \cdot \Delta x_1 \quad \text{durch das}$$

Rohr zu drücken (Arbeit am Fluid)

$$\Delta W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = P_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = P_1 \Delta V$$

• Das Fluid verrichtet Arbeit („schiebt etwas weg“)

$$\Delta W_2 = -P_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = -P_2 \cdot \Delta V$$

Aus Energieerhaltungssatz:

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = P_1 \cdot \Delta V - P_2 \cdot \Delta V$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} \frac{m}{\Delta V} \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \frac{m}{\Delta V} \cdot v_1^2 = P_1 - P_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_1 - P_2$$

Berücksichtige zusätzlich einen Höhenunterschied zwischen Zufluss und Abfluss ($y_2 \neq y_1$) ($E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot y$ berücksichtigen)

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho \cdot g \cdot y_2$$

[8.5]

„Bernoullische Gleichung“

$$P + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot y = P_0 = \text{const.}$$

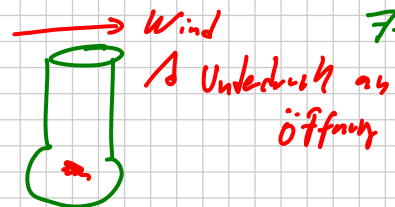
$P_0 \hat{=}$ Gesamtdruck

$p \hat{=}$ statische Druck

i) Mamin, Zerstäuber, Vergaser

ii) Hausdächer fliegen weg

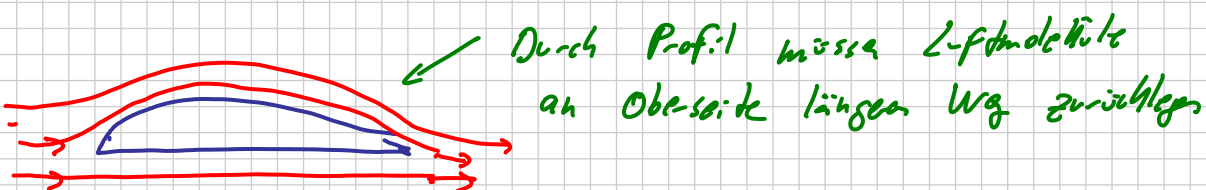
iii) Tragflächenprofile
(Flugzeug, Segelboot)



7.12.2010

Einige Fakten zum Fliegen

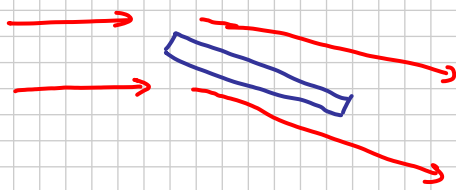
a) Oft findet man folgende Erklärung



→ höhere Geschwindigkeit, damit sie sich wieder mit dem ursprünglichen Luftdruck treffen → Unterdruck

DAS IST FALSCH!

- ⑥ Ein plattes Profil mit einem Anstellwinkel erfährt einen Auftrieb



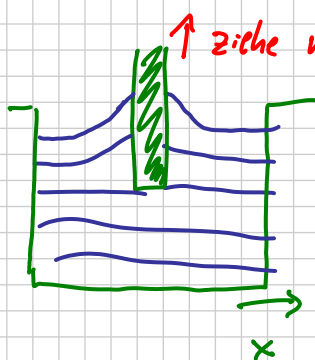
Luftmoleküle erfahren Impulsänderung nach unten $\rightarrow$ aus Aktion = Reaktion erfährt der Flügel eine Impulsänderung nach oben $\rightarrow$ „Auftrieb“

Bei etwa 25° Anstellwinkel reißt die Strömung ab.

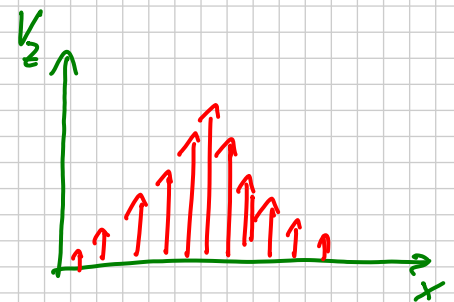
- ⑦ Ein Profil sorgt für zusätzlichen Auftrieb und erzeugt weniger Strömungswiderstand
- ⑧ Eine korrekte hydrodynamische Beschreibung erfordert die Berücksichtigung von Wirbeln und ist sehr komplex.

8.2.1 Viskosität

Innere Reibung bei Flüssigkeiten



$\rightarrow$ Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle im Becher



Benötigte Kraft F um eine Platte mit einer eingetauchten Fläche A mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen:

$$F = \eta \cdot A \cdot \left(\frac{dv_z}{dx} \right)$$

[8-6]

$\frac{dv_z}{dx} \hat{=}$ Änderung der Molekülgeschwindigkeit $\perp$ zur Plattenbewegung

$\eta \hat{=}$ Viskosität, „Zähigkeit“

Die Einheit der Viskosität ist $1 \frac{N \cdot s}{m^2} = 1 \text{ Pa} \cdot s$

$$\eta(\text{H}_2\text{O}, 20^\circ\text{C}) \sim 1,002 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot s$$

$$\eta(\text{H}_2\text{O}, 0^\circ\text{C}) \sim 1,8 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot s$$

$$\eta(\text{Motoröl}) \sim 200 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot s$$

$$\eta(\text{Glycerin}) \sim 1480 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot s$$

$$\eta(\text{N}_2) \sim 0,017 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot s$$

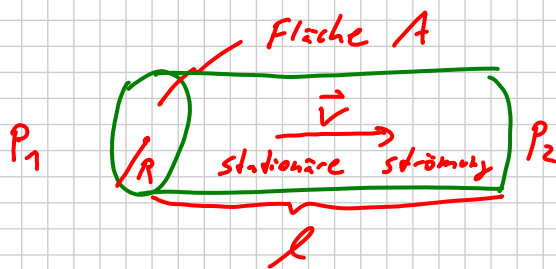
$$\eta(\text{suprafluides Helium}) \sim 0 \text{ Pa} \cdot s$$

Die Viskosität η bestimmt auch die Sinkgeschwindigkeit einer Kugel in einem Fluid $F_{\text{Reib}} = -6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v$

↗ Kugelfall-Viskosimeter

(Reversible Strömung $\rightarrow$ Reynoldszahl)

- Strömung in einem Rohr (Arterie, Pipeline)



Damit $\vec{v} = \text{const.}$

↗ Reibungskraft $F_{\text{Reib}} = (P_1 - P_2) \cdot A$

↗ Gesetz von Hagen-Poiseuille

$$\text{Volumenstrom} = \frac{d\text{Volumen}}{dt} = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot (P_1 - P_2)}{8 \cdot \eta \cdot l}$$

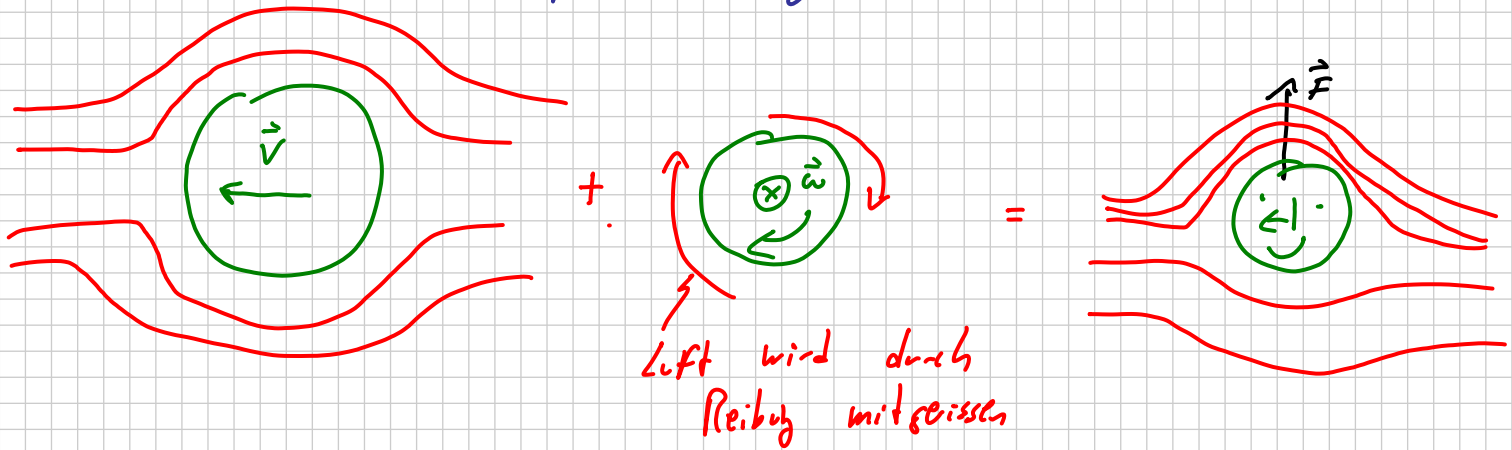
[8-7]

- proportional zu R^4 (Arteriosklerose, verhärtete Leitung)

- proportional zu $1/\eta$

8.2.2 Magnusseffekt

Wie kann ein Fußball eine gekrümmte Flugbahn annehmen?



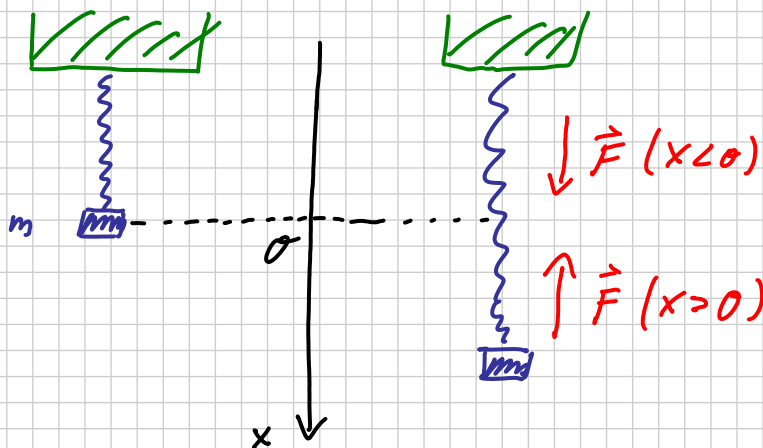
$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_{\text{oben}} &= \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{v}_{\text{unten}} &= \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned} \right\} \Delta \text{ Druckdifferenz } \Delta p$$

9. Schwingungen

8.12.2010

Schwingungen sind wichtig Mechanik, Elektrodynamik, Optik, Quantenmechanik, ...

9.1 Freie, ungedämpfte Schwingungen



$$F = -k \cdot x \quad (-) \quad k \hat{=} \text{Federkonstante}$$

$$\Leftrightarrow m \cdot a(t) = -N \cdot x(t)$$

$$\left(\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \hat{=} a \right)$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \ddot{x}(t) = -N \cdot x(t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \left(\frac{N}{m} \right) \cdot x(t) = 0$$

$$\checkmark \quad \boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0}$$

[9-1]

$$\text{mit } \omega_0^2 := N/m$$

„Schwingungsgleichung des harmonischen Oszillators“

• Differentialgleichung (DGL)

– linear ($x, \dot{x}, \ddot{x}$ gehen nur ein)

– zweiter Ordnung ($\ddot{x}$)

– homogen ($= 0$, keine Konstante)

• Wie sieht $x(t)$ aus?

(i) Lösungsansatz: $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

(ii) Ableitungen:

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 \cdot x_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \cdot x_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 \cdot x(t)$$

(iii) Einsetzen in DGL:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) \stackrel{!}{=} 0$$

$$-\omega_0^2 \cdot x(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0 \quad \checkmark$$

x_0 := Amplitude der Schwingung (maximaler Wert für $x(t)$)

ω_0 := Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz (bei Masse an Feder: $\omega_0 = \sqrt{N/m}$)

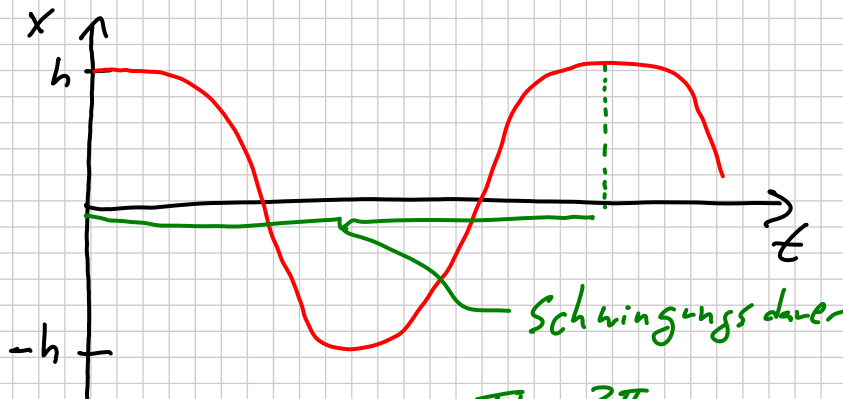
φ_0 := Phase, Phasenwinkel (hängt ab von Startbedingungen)

Beispiel: Masse an Feder, lenkte zu Beginn um h nach unten aus $\rightarrow x(t_0) = h = x_0$

$$\rightarrow x(t) = h \cdot \cos(\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot t + \varphi_0)$$

$\hookrightarrow \varphi_0 = 0$, damit
 $x(t=0) = h$

$\rightarrow$ PERIODISCHE, HARMONISCHE
Bewegung der Masse



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Geschwindigkeit

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 \cdot \overset{\text{Maximalgeschwindigkeit } v_0}{x_0} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$\rightarrow x(t) \text{ maximal} \rightarrow v(t) \text{ minimal}$

- Beschleunigung

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \cdot \overset{\text{maximale Beschleunigung}}{x_0} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- Der Phasenwinkel φ_0 verschiebt die Lage der Sinuskurve, aber nicht die Form

- Andere Schreibweise für Lösungssatz

$$x(t) = \underline{x_0 \cdot e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}}$$

$$\rightarrow \ddot{x}(t) = \underline{x_0 \cdot \omega_0^2 (i)^2 \cdot e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}}$$

$$\rightarrow \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \cdot \underline{x(t)}$$

(Eulersche Formel
 $e^{ip} = \cos p + i \sin p$)

9.2 Energie der harmonischen Schwingung

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} m (v(t))^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \cdot x_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$= \frac{1}{2} \cancel{m} \frac{k}{\cancel{m}} \cdot x_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

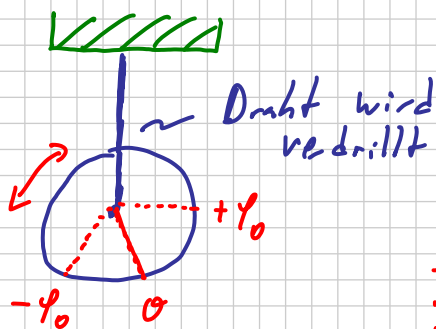
$$E_{pot}(t) = \frac{1}{2} k \cdot (x(t))^2 = \frac{1}{2} k \cdot x_0^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow E_{mech}^{total}(t) &= E_{kin}(t) + E_{pot}(t) \\ &= \frac{1}{2} k \cdot x_0^2 \cdot [\underbrace{\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}_1] \\ &= \frac{1}{2} k \cdot x_0^2 = const. \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ ständiger Austausch von E_{pot} und E_{kin}

9.3 Andere Beispiele für Oszillationen

a) Torsionspendel



Rücktreibendes Drehmoment τ

$$\tau = -\kappa \cdot \varphi$$

Torsionskonstante
Winkelrichtgröße

Winkelauslenkung
(in rad)

Zweites Newtonsches Axiom für Rotationen

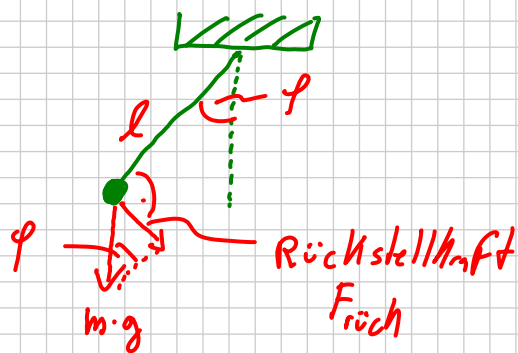
$$\tau = I \cdot \ddot{\varphi}$$

$\hookrightarrow$ Trägheitsmoment

$$\hookrightarrow I \cdot \ddot{\varphi} = -\kappa \cdot \varphi \quad \hookrightarrow \ddot{\varphi}(t) + \left(\frac{\kappa}{I}\right) \cdot \varphi(t) = 0$$

$\rightarrow$ Harmonische Oszillator mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$ und $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{\kappa}}$

⑥ Mathematisches Pendel



$$\left. \begin{aligned} x &= l \cdot \varphi \\ \Delta \ddot{x} &= l \cdot \ddot{\varphi} \\ F_{\text{Ruech}} &= -m g \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \\ & \\ & -m \cdot g \cdot \sin \varphi = -m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\Delta \ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} \right) \cdot \sin \varphi = 0$$

Dies ist keine DGL für einen harmonischen Oszillator (da $\sin \varphi$)

Aber Reihenentwicklung (Taylor-Reihe)

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots$$

Für kleine Winkel gilt: $\sin \varphi \sim \varphi$

← gemessen in rad

φ / in Grad	φ / in rad	$\sin \varphi$	$(\varphi - \sin \varphi) / \sin \varphi$
5	0,0873	0,0872	0,1 %
10	0,1753	0,1736	0,5 %
45	0,7854	0,7071	11 %

Δ bei kleinen Auslenkungen des Pendels

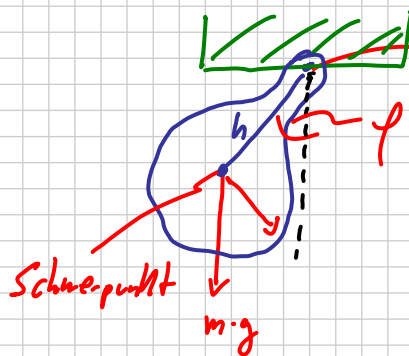
$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} \right) \cdot \varphi = 0 \quad (\text{harmonisch. Oszillator})$$

$$\omega_0 = \sqrt{g/l} \quad \Delta \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{unabhängig von Masse})$$

z.B.: $l = 1 \text{ m} \quad \Delta \quad T = 2 \text{ s}$

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2} \quad (\text{Ermittlung von } g)$$

c) Physikalisches Pendel



Rüchtreibendes Drehmoment ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$)

$$\tau = -m \cdot g \cdot \sin \varphi \cdot h$$

$$I \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin \varphi \cdot h$$

Trägheitsmoment

für kleine Auslenkungen: nicht $\dot{\varphi}$

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{m \cdot g \cdot h}{I} \right) \cdot \varphi = 0$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot h}}$$

→ so kann man Trägheitsmomente bestimmen

9.4 Gedämpfte harmonische Schwingung

14.12.2010

Reibungskraft F_R wirkt Schwingung entgegen

F_R kann: - konstant sein (Gleitreibung, Rollreibung)

- $\propto v^2$ sein (turbulente Luftreibung)

prop. - $\propto v$ sein (viskose Fluide „Stokes“)

Annahme $F_R = -bv = -b \cdot \dot{x}$

$$m \ddot{x} = \underbrace{-Kx - b\dot{x}}_{\sum \text{Kräfte}}$$

(z.B. Federpendel mit Reibung in Luft)

$$\ddot{x} + \left(\frac{b}{m} \right) \cdot \dot{x} + \left(\frac{K}{m} \right) \cdot x = 0$$

[9-2]

Definiere $\gamma: \frac{1}{2} \left(\frac{b}{m} \right)$ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\hookrightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

(i) Lösungsansatz: $x(t) = x_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

mit $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

(ii) Ableitungen:

$$\dot{x}(t) = -\gamma \cdot x(t) + \omega \cdot x_0 \cdot e^{-\gamma t} (-\sin(\omega t + \varphi_0))$$

$$\ddot{x}(t) = -\gamma \cdot \dot{x}(t) + \omega \cdot \gamma \cdot x_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 \cdot x(t)$$

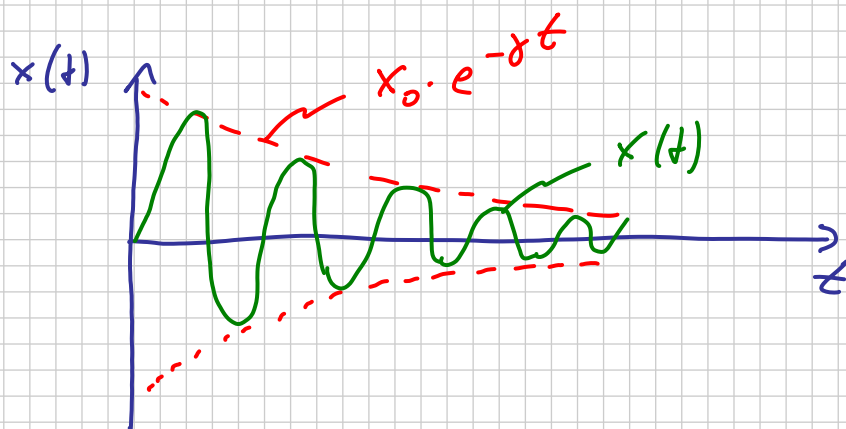
(iii) Einsetzen in DGL:

$$\hookrightarrow \hookrightarrow -\omega^2 \cdot x(t) - \gamma^2 \cdot x(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$$

$$\hookrightarrow (\omega_0^2 - \gamma^2 - \omega^2) = 0$$

$$\hookrightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$x(t) = x_0 \cdot \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{exponentieller Abfall}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t + \varphi_0)}_{\text{Oszillation mit } \omega \text{ (nicht mit } \omega_0 \text{ als ungedämpfte Oszillation)}}$$



② Schwache Dämpfung, $\gamma < \omega_0 \rightarrow$ „SCHWINGFALL“

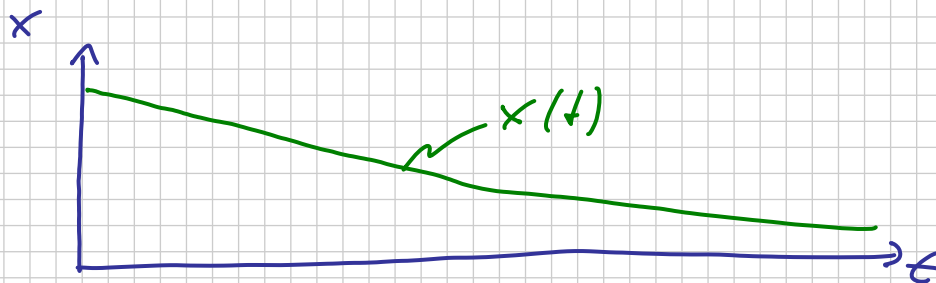
- ω kleiner als ohne Reibung
- exponentieller Abfall der Amplitude

⑥ Sehr starke Dämpfung, $\gamma > \omega_0 \rightarrow$ „NRIECHFALL“

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ wird imaginär

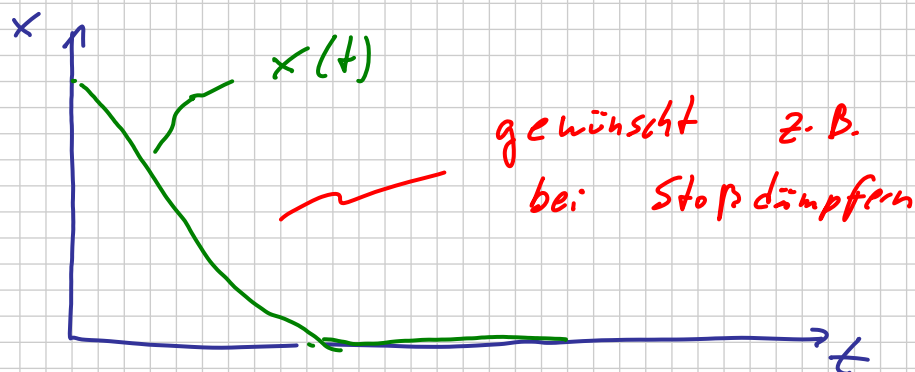
(z.B. $(i \cdot a)^2 = -1 \cdot a^2 = -a^2 \rightarrow \sqrt{-a^2} = i \cdot a$)

- keine periodische Schwingung
- $x(t \rightarrow \infty) = 0$

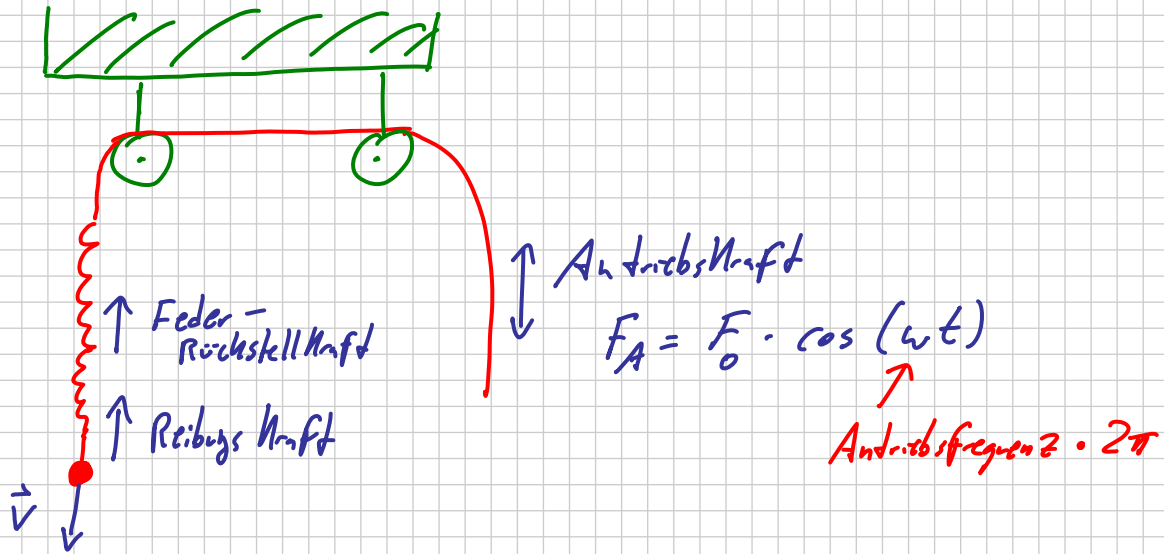


③ Spezialfall, $\gamma = \omega_0 \rightarrow$ „APERIODISCHER GRENZFALL“

$\rightarrow$ auch $x(t) = (x_1 + c_2 \cdot t) \cdot e^{-\gamma t}$ ist
auch eine Lösung $\rightarrow$ meth. Methoden



9.5 Erzwungene Schwingung



$$m \cdot \ddot{x} = -Kx - b\dot{x} + F_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{b}{m}\right) \cdot \dot{x} + \left(\frac{K}{m}\right) \cdot x = \left(\frac{F_0}{m}\right) \cdot \cos(\omega t) \quad [9-3]$$

$$\left(\frac{b}{m}\right) := 2\gamma \quad \left(\frac{K}{m}\right) := \omega_0^2$$

Lineare, inhomogene DGL zweite Ordnung

$$x(t) = A_1 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Frequenz ohne äußere Kraft

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Nach Einschwingzeit ($t \gg \frac{1}{\gamma}$ für $t \rightarrow \infty$) wird der erste Summand sehr klein

$$x(t, t \rightarrow \infty) = A_2(\omega) \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

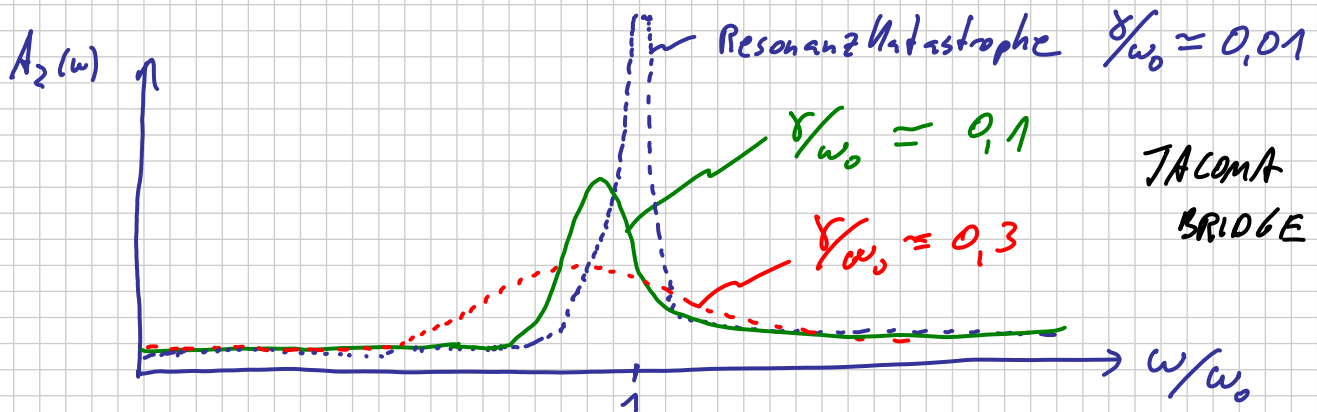
mit $A_2(\omega) = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$

- Bei welchem ω wird diese Amplitude maximal?

→ Minimiere Nenner in Abhängigkeit von ω

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2] \stackrel{!}{=} 0$$

→ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ „RESONANZFREQUENZ“



9.6 Wellen

21.12.2010

Kopplung von schwingendem Massepunkt m
mit benachbarten Massepunkten



- Ausbreitung der Schwingung im Raum
- Kein Netto-Massentransport, aber Energietransport

9.6.1 Eigenschaften von Wellen

② Wellentypen

- Auslenkung der Massepunkte SENKRECHT zur Ausbreitungsrichtung der Welle:

TRANSVERSALE EBENE WELLE (z.B. Saite, Gummiseil)

- Auslenkung PARALLEL zur Ausbreitungsrichtung

LONGITUDINALE EBENE WELLE (z.B. Feder, Schall)

- Welle breitet sich von punktförmigen Zentrum in ALLE RICHTUNGEN aus

KUGELWELLE (z.B. Stein im Wasser)

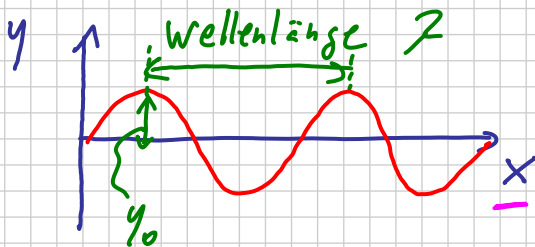
→ Können transversal oder longitudinal sein

⑥ Auslenkung eines Teilchens bei x

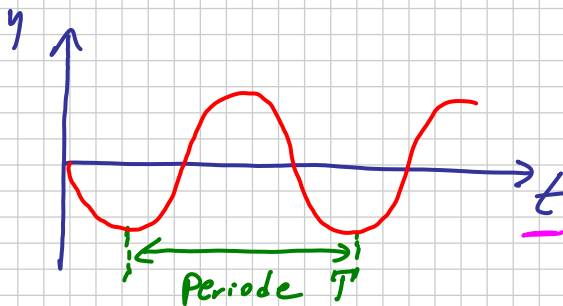
$$y(x, t) = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t)$$

[9-4]

$y_0 :=$ Amplitude $k, \omega \rightarrow$ später



Momentaufnahme des ganzen Seils bei $t=0$
 $\rightarrow y = y_0 \cdot \sin(kx)$



Film von einem Massepunkt bei $x=0$

$$\rightarrow y = -y_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$(\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi))$$

c) Wellenlänge und Periode

- Nach Wellenlänge λ ist $y(x + \lambda) = y(x)$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow y_0 \cdot \sin(kx) &= y_0 \cdot \sin(k(x + \lambda)) \\ &= y_0 \cdot \sin(kx + k\lambda) \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow k \cdot \lambda = 2\pi$$

$$\hookrightarrow \text{Wellenzahl } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

[9-5]

- Nach Periode T ist $y(t + T) = y(t)$

$$\hookrightarrow y_0 \cdot \sin(-\omega t) = y_0 \cdot \sin(-\omega(t + T)) \quad \hookrightarrow \omega T = 2\pi$$

$$\hookrightarrow \text{Winkel Frequenz } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

[9-6]

$$\text{Oft auch Frequenz } f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

d) Geschwindigkeit der Welle $\dot{x}(t)$ (nicht $\dot{y}(t)$)

Wie schnell verschiebt sich z.B. ein Maximum entlang der Ausbreitungsrichtung $\rightarrow$ „Phasengeschwindigkeit“

$$y(x, t) = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \stackrel{!}{=} y_0 \quad (\text{für Maximum})$$

$$\hookrightarrow (kx - \omega t) \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2}$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt}(kx - \omega t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow k \cdot \dot{x} - \omega = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = \frac{\omega}{k} := v_{ph} \quad (\text{Phasengeschwindigkeit})$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\cancel{\lambda} \cdot \cancel{2\pi}}{\cancel{\pi} \cdot \cancel{2\pi}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

[9-7]

$f \hat{=}$ Frequenz in s^{-1}

- Phasengeschwindigkeiten (Beispiele)

- Transversalwelle auf Seil oder Saite

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{T_s}{A \cdot \rho}}$$

$T_s \hat{=}$ Spannung

$A \hat{=}$ Querschnitt

$\rho \hat{=}$ Dichte des Materials

- Longitudinalwelle in festen Körpern (auf Ende draufschlagen)

$$v_{ph}^L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$E \hat{=}$ Elastizitätsmodul

z.B. Eisenstab $v_{ph}^L \sim 6000 \text{ m/s}$

- Transversalwelle in festen Körper

$$v_{ph}^T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$G \hat{=}$ Schermodul, Torsionskonstante

z.B. Eisenstab $v_{ph}^T \sim 3000 \text{ m/s}$

↙ Ausbreitung von Erdbeben

transversale s-Welle $\sim 4,5 \text{ km/s}$ } Epizentrum - Abstand
longitudinale p-Welle $\sim 8 \text{ km/s}$ } aus Diffferenz

- Schallwellen (Longitudinalwellen) in Gasen

$$v_{ph} = \sqrt{1,4 \cdot \left(\frac{p}{\rho}\right)}$$

$p \hat{=}$ Druck

$\rho \hat{=}$ Dichte

z.B. im Hörsaal:

$\rho_{\text{Luft}} \sim 1,2 \text{ kg/m}^3$

$p_{\text{Luft}} \sim 1 \times 10^5 \text{ Pa}$

↙ $v_{ph} = 340 \text{ m/s}$

9.6.2 Überlagerung harmonische Wellen

- (i) Zwei harmonische Wellen $y_1(x,t)$ und $y_2(x,t)$, beide in gleicher Richtung, gleiches k und ω mit gleicher Amplitude y_0 überlagern sich unabhängig.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_0 \cdot \sin(kx - \omega t) + y_0 \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi) \end{aligned}$$

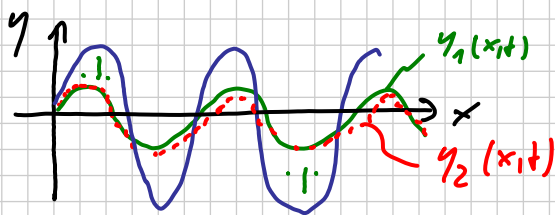
[Benutze: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$]

$$\hookrightarrow y(x,t) = \underbrace{2 y_0 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}_{\text{const.}} \cdot \sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

$\hookrightarrow$ wieder eine ebene Welle

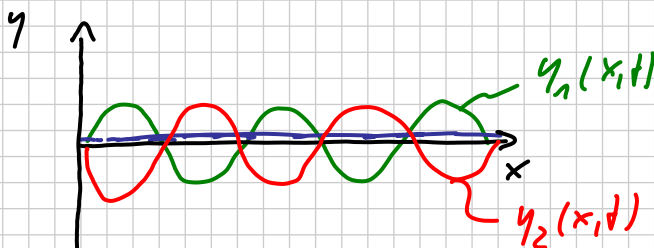
- (a) Phasenunterschied $\varphi = 0^\circ$ (oder $360^\circ, 720^\circ, \dots$)

$$\hookrightarrow y(x,t) = \underbrace{2 \cdot y_0}_{\text{doppelt so große Amplitude}} \cdot \sin(kx - \omega t)$$



VOLLSTÄNDIG
KONSTRUKTIVE
ÜBERLAGERUNG

- (b) Phasenunterschied $\varphi = 180^\circ$ (oder $540^\circ, 900^\circ, \dots$)



VOLLSTÄNDIG
DESTRUKTIVE
ÜBERLAGERUNG

(iii) Zwei harmonische Wellen laufen in entgegengesetzte Richtungen $\rightarrow$ STEHENDE WELLEN

$$y_1(x, t) = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (\text{Ausbreitung in } x\text{-Richtung})$$

$$y_2(x, t) = y_0 \cdot \sin(kx + \omega t + \varphi) \quad (\text{Ausbreitung entgegenges. } x\text{-Richtung } v \rightarrow -v)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow y(x, t) &= y_0 \cdot 2 \cdot \left[\sin \frac{1}{2}(kx - \omega t + kx + \omega t + \varphi) \cdot \cos \frac{1}{2}(kx - \omega t - kx - \omega t - \varphi) \right] \\ &= \underbrace{2 \cdot y_0 \cdot \sin(kx + \frac{\varphi}{2})}_{\text{Amplitude am Ort } x} \cdot \underbrace{\cos(-\omega t - \frac{\varphi}{2})}_{\text{Schwingungsterm}} \end{aligned}$$

$$y(x, t) = 2 \cdot y_0 \cdot \sin(kx + \frac{\varphi}{2}) \cdot \cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$$

[9-6]

- An bestimmten Orten x ist die Auslenkung immer null $\rightarrow$ „SCHWINGUNGSNODEN“

$$\sin(kx + \frac{\varphi}{2}) = 0 \quad \wedge \quad (kx + \frac{\varphi}{2}) = n \cdot \pi \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow x = (n \cdot \pi - \frac{\varphi}{2}) \cdot \frac{1}{k}$$

$$\text{mit } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\hookrightarrow x = \left(n - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{bei } \varphi = 0 \quad \wedge \quad x = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

- Maxima der Auslenkung $\rightarrow$ „SCHWINGUNGSBAUCHE“

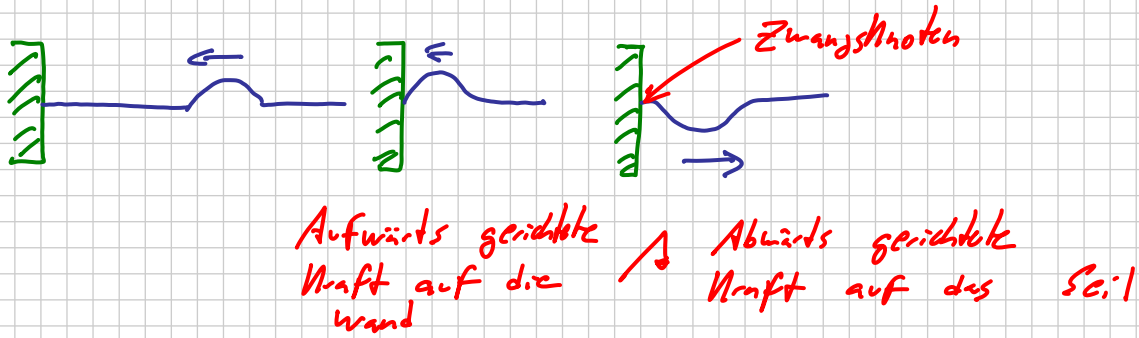
$$|\sin(kx + \frac{\varphi}{2})| = 1 \quad \wedge \quad (kx + \frac{\varphi}{2}) = (n + \frac{1}{2})\pi \quad \text{mit } n = 0, 1, \dots$$

$$\Leftrightarrow x = \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\varphi}{2\pi} \right] \cdot \frac{\lambda}{2}$$

(iii)

Reflexion an FESTEM Ende

22.12.2010



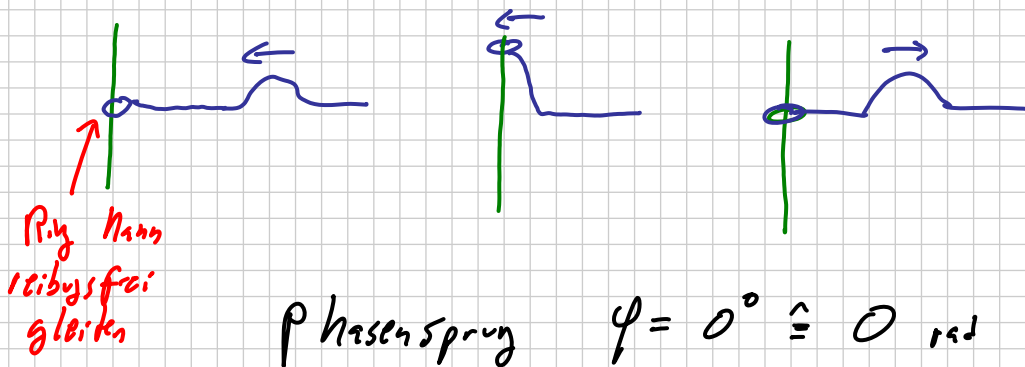
↗ Phasensprung um $\varphi = 180^\circ \hat{=} \pi$ an der Wand

↗ Knoten bei

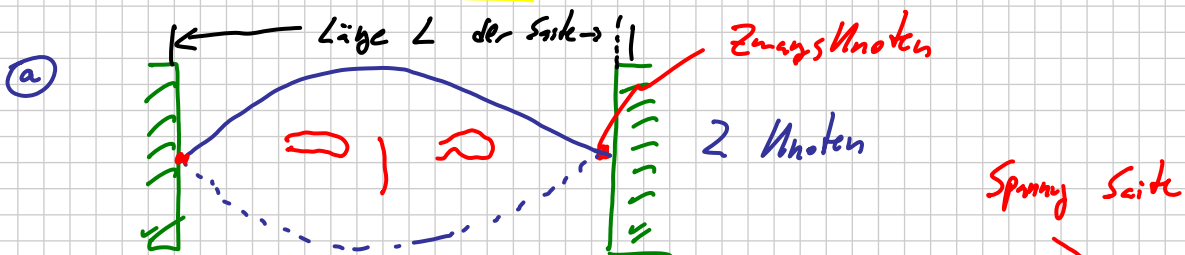
$$x = n \cdot \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{2} = (n - \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2}$$

(Achtung: Nulldurchgang nicht beim Zwangsknoten)

(iv)

Reflexion an FREIEM Ende

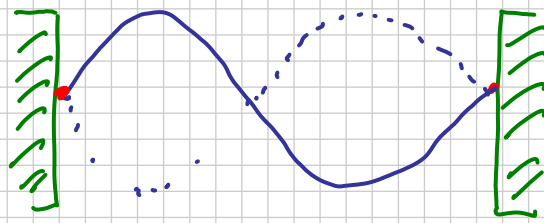
(v)

Resonanz Frequenzen

↗ Größte Wellenlänge $\frac{1}{2} \lambda_1 = L$ ↗ Frequenz $f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$

„FUNDAMENTALSCHWINGUNG“

⑥

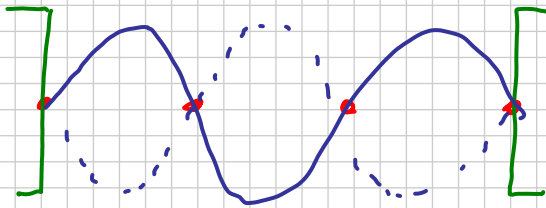


3 Knoten

↙ zweitgrößte Wellenlänge $\lambda_2 = L$ ↘ $f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L}$

"ZWEITE HARMONISCHE"

⑦

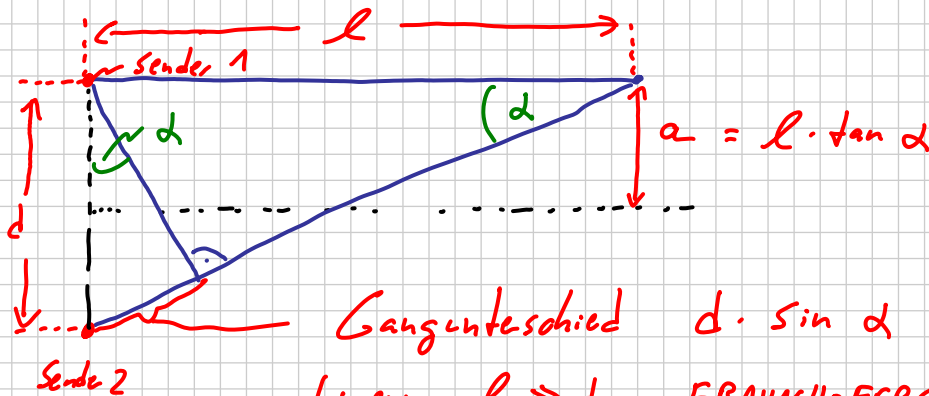


4 Knoten

↙ dritgrößte Wellenlänge $\frac{3}{2} \lambda_3 = L$ ↘ $f_3 = \frac{3 \cdot v}{2L}$

"DRITTE HARMONISCHE"

⑥① Überlagerung von Wellen aus verschiedenen Richtungen



(wenn $L \gg d$ "FRAUNHOFERSCHE NÄHERUNG")

Die Sender müssen KOHÄRENT sein, d.h.
gleiche Frequenz ω und an einem Ort zeitlich
konstante Phasendifferenz φ .

Intensitätsminima (vollständig destruktive Interferenz) bei Gangunterschieden

11.01.2011

$$d \cdot \sin \alpha = (2n+1) \frac{\lambda}{2} \quad \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2} \dots \right)$$

$$\sin \alpha = (2n+1) \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{d}$$

Beispiel: Schallwellen mit $f = 2,5 \text{ kHz}$ $\lambda = 13,6 \text{ cm}$

Erstes Minimum für $d = 1 \text{ m}$ ist

$$\text{bei } \sin \alpha = 0,068 \quad \alpha \approx 3,9^\circ$$

$$\begin{array}{lll} a = l \cdot \tan \alpha & l = 5 \text{ m} & a = 34 \text{ cm} \\ & 10 \text{ m} & a = 68 \text{ cm} \\ & 20 \text{ m} & a = 136 \text{ cm} \end{array}$$

Bei kleinen Frequenzunterschieden zwischen den beiden Sendern $\rightarrow$ Überlagerung der Maxima wiederholt sich nach gewisser Zeit $\rightarrow$ "SCHWEBUNG"

$$\text{Schwebungsfrequenz } f_s = |f_1 - f_2|$$

9.6.3 Huygensches Prinzip

(Beugung - Brechung - Reflexion)

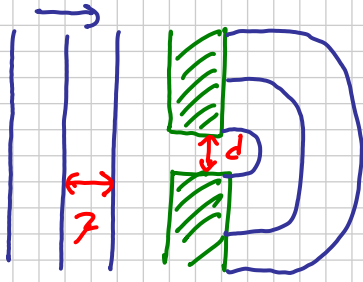
Jeder Punkt einer Wellenfront (Phasenfläche) ist der Ausgangspunkt einer neuen Kugelwelle.



Einhüllende nach einer Periode T
 $\rightarrow$ neue Wellenfront

② Biegung

Welle trifft auf schmalen Durchlass / Spalt



Neue Bewegungsrichtung
 $\neq$ Richtung der einlaufenden Welle

↗ Biegung

(besonders ausgeprägt bei $d \ll \lambda$)

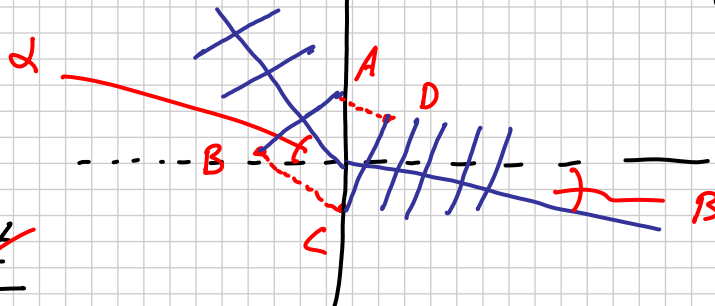
③ Brechung und Reflexion

Welle trifft auf eine Trennfläche zwischen zwei Medien, in denen sie verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten v_1 bzw. v_2 besitzt.

• Brechung

Medium A $v_{ph} = v_A$ Medium B $v_{ph} = v_B$

$v_B < v_A$



$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{v_B \cdot t}{v_A \cdot t}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \sin \beta$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \sin \alpha$$

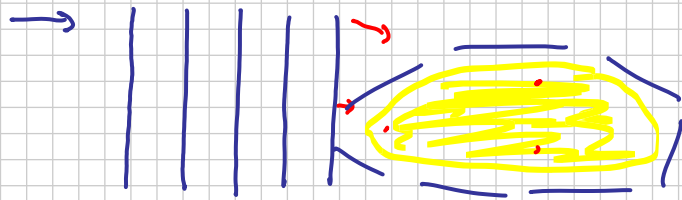
$$\nearrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{v_A}{v_B}$$

↗ SNEZZIUSSES BRECHUNGSGESETZ

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_A}{v_B}$$

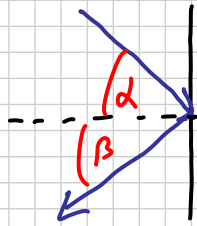
[9-7]

Beispiel: Bei Wasserwellen ist $v_{ph} = \sqrt{g \cdot \text{Wassertiefe}}$



Am Strand (flaches Ufer)
kommen Wellen immer von vorne

• Reflexion



Man kann ähnlich zeigen

$\beta = \alpha$ Reflexionswinkel = Einfallswinkel

→ OPTIK

9.6.4 Doppler - Effekt (Christian Doppler, 1842)

(z.B. Radarmessung von Geschwindigkeiten, Sternengeschwindigkeit, Formel 1)

SENDER S

EMPFÄNGER E



- Wie viele Wellenfronten ($\hat{=}$ Wellenlängen) N_w erreichen den Empfänger in der Zeit t ?

① Sender stationär, Empfänger stationär

Strecke, die Welle relativ zu E zurücklegt

$$d_{\text{welle}}^{\text{rel}} = v_{ph} \cdot t \quad \rightarrow \quad N_w = \frac{v_{ph} \cdot t}{\lambda}$$

von E empfangene Frequenz $f = N_w / t = \frac{v_{ph}}{\lambda}$

(ii) Sender stationär, Empfänger bewegt

E bewege sich $\begin{cases} \text{(a) mit } v_E \text{ auf S zu} \\ \text{(b) mit } -v_E \text{ von S weg} \end{cases}$

$$\hookrightarrow d_{\text{Welle}}^{\text{rel}} = v_{ph} \cdot t + v_E \cdot t$$

$$\hookrightarrow N_w = \frac{v_{ph} \cdot t}{\lambda} + \frac{v_E \cdot t}{\lambda}$$

$$\text{(a)} \hookrightarrow f' = \frac{v_{ph} + v_E}{\lambda} = f \cdot \left(\frac{v_{ph} + v_E}{v_{ph}} \right) \hookrightarrow \text{höhere Frequenz}$$

$$\text{(b)} \hookrightarrow f' = \frac{v_{ph} - v_E}{\lambda} = f \cdot \left(\frac{v_{ph} - v_E}{v_{ph}} \right) \hookrightarrow \text{geringere Frequenz}$$

(iii) Sender bewegt, Empfänger stationär

S bewege sich $\begin{cases} \text{(a) mit } v_s \text{ auf E zu} \\ \text{(b) mit } -v_s \text{ von E weg} \end{cases}$

$$\hookrightarrow \text{Neue Wellenlänge } \lambda' = v_{ph} \cdot T - v_s \cdot T$$

$$\text{(a)} \hookrightarrow f' = \frac{v_{ph}}{\lambda'} = \frac{v_{ph}}{T \cdot (v_{ph} - v_s)} = f \cdot \left(\frac{v_{ph}}{v_{ph} - v_s} \right) \hookrightarrow \text{höhere Frequenz}$$

$$\text{(b)} \hookrightarrow f' = f \cdot \left(\frac{v_{ph}}{v_{ph} + v_s} \right) \hookrightarrow \text{kleinere Frequenz}$$

Beispiel: Radarmessung hinter der Zoobrücke

- fester Radarsender mit $V_{ph} = c$, $f = 3 \times 10^{10} \text{ Hz}$
- Auto mit $v_E = +60 \text{ km/h}$ sieht Frequenz

$$f' = 3 \times 10^{10} \text{ Hz} \left(\frac{3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 16,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right) = 3,00000017 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

- Auto reflektiert „diese Frequenz“ $\rightarrow$ bewegter Sender. Der feste Radarempfänger misst

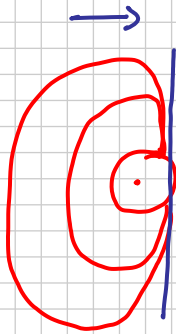
$$f'' = f' \cdot \left(\frac{3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 16,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right) = 3,00000034 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

$$\rightarrow f'' - f = 3400 \text{ Hz}$$

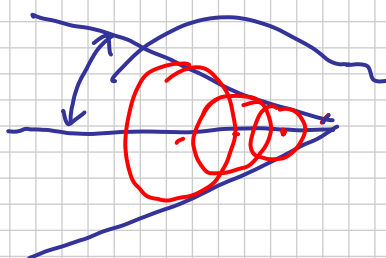
$$(\text{bei } 30 \text{ km/h: } f'' - f = 1700 \text{ Hz})$$

• Überschall Null

- ① $V_s = V_{ph} \rightarrow$ Maxima aller Wellen überlagern sich
 $\rightarrow$ Schockwellenfront vor dem Sender



- ② $V_s > V_{ph} \rightarrow$ Maxima überlagern sich im
MACHSCHEN WINKEL



Öffnungswinkel $\hat{=}$

$$\sin \hat{= } = v_{ph} / v_s$$

- Menschliches Hörvermögen

Ohr kann über sehr weiten Intensitätsbereich hören,
etwa 12 Größenordnungen!

↳ Dezibel - Skala $\beta = 10 \text{ dB} \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$
mit Hörschwelle I_0

↳ Hörschwelle: 0 dB

Unterhaltung: $\approx 60 \text{ dB}$

Straßenlärm: $\approx 90 \text{ dB}$

Presslufthammer: $= 100 - 120 \text{ dB}$

Disco/
Club)
Lauter Lounge: $= 100 - 125 \text{ dB}$

Düsenjet: $\approx 130 \text{ dB}$

Die Empfindlichkeit des Ohrs ist frequenzabhängig
(Phon - Skala)

$\sim 20 \text{ Hz} - 16000 \text{ Hz}$

L nimmt mit Alter ab