

6. Schwerpunkt und Impuls

6.1 Schwerpunkt (Massenmittelpunkt)

Der Schwerpunkt ("center of mass", C.M.) eines Körpers oder eines Systems aus Teilchen bewegt sich so, als ob alle Masse in ihm konzentriert ist und alle äußeren Kräfte dort angreifen.

(i) Zwei Massepunkte



$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

mit $M = m_1 + m_2$:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$$

(Ursprung kann irgendwo auf Verbindungsline liegen)

(ii) n Massepunkte in 3D

$$\left. \begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^n m_i x_i \\ y_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i \\ z_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i \end{aligned} \right\} \text{ mit } M = \sum_{i=1}^n m_i$$

(iii) Kontinuierliche Massenteilung

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

[6-1]

- Für homogene Körper

homogen $\hat{=}$ Dichte $\rho = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV}$

$\nwarrow$ Volumen

$\rightarrow dm = \rho \cdot dV$

$\rightarrow x_{cm} = \frac{1}{M} \cdot \int x dm = \frac{\rho}{M} \cdot \int x dV = \frac{1}{V} \cdot \int x dV$

$y_{cm} = \frac{1}{V} \cdot \int y dV \quad z_{cm} = \frac{1}{V} \cdot \int z dV$

- Falls Symmetrien existieren liegt der Schwerpunkt in der Symmetrieebene, auf der Symmetrieachse, auf dem Symmetriepunkt.

Beispiel: Schwerpunkt des System Erde - Mond

9.11.2010

Wähle als Ursprung: Mittelpunkt der Erde

$\rightarrow r_{cm} = \frac{m(\text{Mond}) \cdot \text{Abstand (Erde-Mond)} + 0}{m(\text{Mond}) + m(\text{Erde})}$

$= \frac{7,4 \times 10^{22} \text{ kg} \cdot 3,8 \times 10^8 \text{ m}}{7,4 \times 10^{22} \text{ kg} + 6 \times 10^{24} \text{ kg}}$

$= 4,6 \times 10^6 \text{ m} \quad (r(\text{Erde}) \sim 6 \times 10^6 \text{ m})$

$\rightarrow$ liegt innerhalb der Erde

6.2 Schwerpunkt und Newton'sche Axiome

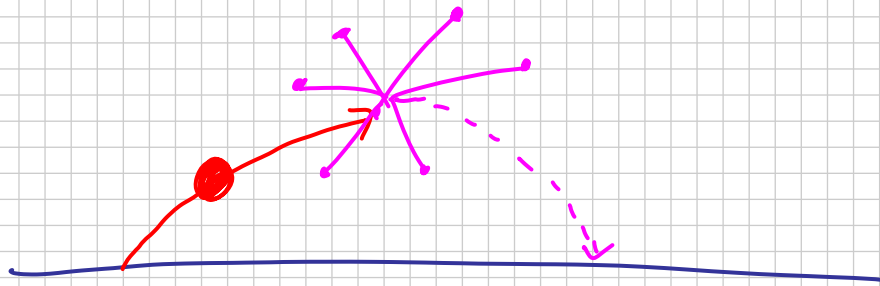
Für ein System aus Teilchen gelten die Newton'schen Axiome für den Schwerpunkt und die Gesamtmasse M :

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Gesamtmasse
(kein Masseverlust)

Beschleunigung
Schwerpunkt

keine internen Kräfte
(z.B. Kollisionen im System)



6.3 Impuls

Der Impuls (auch Linearimpuls) eines Objekts ist definiert als:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

[6-2]

Die Einheit des Impulses ist $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Newton: $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$

bei konstanter Masse

Zeitableitung

Die Formulierung $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ gilt auch bei nicht-konstanter Masse.

- Für ein System von Teilchen

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i = M \cdot \vec{v}_{cm}$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \vec{P} = M \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}_{cm} = M \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}$$

↙ Wenn keine äußeren Kräfte wirken, gilt

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{P} = 0}$$

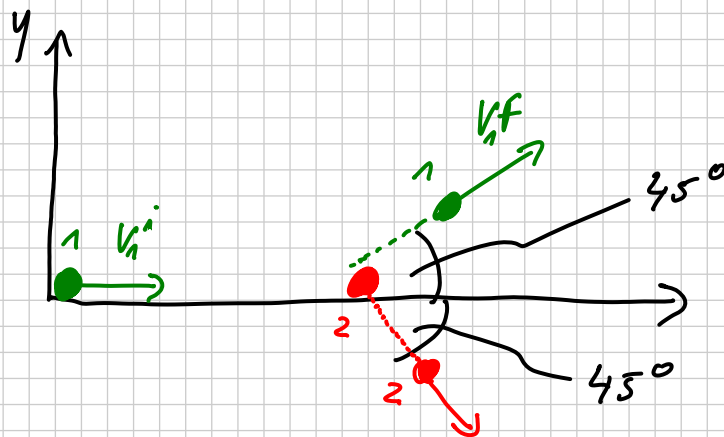
[6-3]

Impulserhaltung, d.h. $\vec{P}_f = \vec{P}_i$

Beispiel: Billard

$$v_1^i = 3 \frac{m}{s} \quad v_1^f = ?$$

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$



$$\hookrightarrow m_1 \cdot \vec{v}_1^i + 0 = m_1 \cdot \vec{v}_1^f + m_2 \cdot \vec{v}_2^f$$

$$m_1 = m_2 = m$$

→ Zerlegen in x- und y-Komponente

$$\bullet \text{ x: } m \cdot v_1^i = m \cdot v_1^f \cdot \cos(45^\circ) + m \cdot v_2^f \cdot \cos(-45^\circ)$$

$$\bullet \text{ y: } 0 = m \cdot v_1^f \cdot \sin(45^\circ) + m \cdot v_2^f \cdot \sin(-45^\circ)$$

$$\text{da } \sin(-45^\circ) = -\sin(45^\circ)$$

$$\nearrow V_2^f = -V_1^f \cdot \frac{\sin(45^\circ)}{-\sin(45^\circ)} = V_1^f$$

(beide Kugeln sind nach dem Stoß gleich schnell)

$$\text{da } \cos(-45^\circ) = \cos(45^\circ)$$

$$\nearrow V_1^f = \frac{V_1^i}{2 \cdot \cos(45^\circ)} = \frac{3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 0,71} = 2,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Beispiel: Zwei Schlittschuhläufer stoßen sich ab:

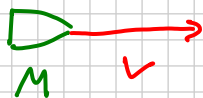
$$m_1 V_1^f + m_2 \cdot V_2^f \stackrel{!}{=} 0 \quad \nearrow V_2^f = -\frac{m_1}{m_2} \cdot V_1^f$$

Beispiel: Positronen-Emissions-Tomografie (PET)

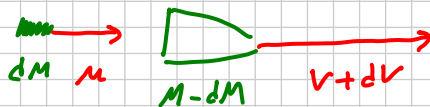


• System mit variabler Masse: RAKETENGleichung

Zeit t :



Zeit $t + dt$:



alle Geschwindigkeiten
($V, u, V+dV$) relativ
zur Erde

Abgeschlossenes System $\hat{=}$ Rakete + Ausstoßgas

$$\text{Impulserhaltung: } \nearrow M \cdot V = (M - dm)(V + dV) + dm \cdot u$$

Relativgeschwindigkeit (Ausstoßgeschwindigkeit)

$$V_{\text{Rel}} = (V + dV) - u \quad \Leftrightarrow u = V + dV - V_{\text{Rel}}$$

$$\nearrow M \cdot V = (M - dm)(V + dV) + dm(V + dV - V_{\text{Rel}})$$

$$\Leftrightarrow \underline{M \cdot v} = \underline{M \cdot v} + M dV - \underline{dM \cdot v} - \underline{dM dV} + \underline{dM \cdot v} + \underline{dM dV} - dM v_{\text{rel}}$$

$$\Leftrightarrow -M dV = -v_{\text{rel}} \cdot dM$$

$$\swarrow \quad v_{\text{rel}} \cdot \frac{dM}{dt} = M \cdot \frac{dV}{dt} = M \cdot a$$

$$\swarrow \quad \boxed{\frac{dM}{dt} \cdot v_{\text{rel}} = M \cdot a}$$

Schubkraft

[6-4]

Diese Raketengleichung gilt in jedem Moment des Fluges.

$V(t)$ kann bestimmt werden $\rightarrow$ Übungen

6.4 Kraftstoß

Während eines einzelnen Stoßes zwischen zwei Körpern wirkt i.A. in einem sehr kurzen Zeitintervall dt eine Kraft:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow d\vec{p} = \vec{F} dt$$

$$\int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt \quad \wedge \quad \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt \quad \text{"Kraftstoß"}$$

Beispiel: Perfekter Ball prallt auf Boden

$$\swarrow \quad \Delta p = m \cdot (-v) - m v = -2m \cdot v = -2 \cdot p_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

- Eine kurz einwirkende große Kraft oder eine länger einwirkende kleine Kraft bewirken die gleiche Impulsänderung.

6.5 Stöße

10.11.2010

6.5.1 Elastische Stöße

- Impuls bleibt bei allen Arten von Stößen erhalten, $\sum_{i=1}^n \Delta \vec{p}_i = 0$
- Gesamtenergie (inkl. Wärme etc.) bleibt immer erhalten
- Kinetische Energie bleibt bei elastischen Stößen erhalten

$$\nearrow \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + Q$$

$Q = 0 \rightarrow$ elastischer Stoß

$Q < 0 \rightarrow$ superelastisch (z.B. „exploding gliders“)

$Q > 0 \rightarrow$ inelastischer Stoß

Ⓐ Stoß in einer Dimension, Objekt 2 ruht vor dem Stoß

$$m_1 \cdot v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\Leftrightarrow m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 v_{2f} \quad (*)$$

Impulserhaltung

v_{1i} = Geschwindigkeit Objekt 1 vor dem Stoß
 v_{1f} = „ „ „ „ nach dem Stoß

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Energieerhaltung
beim
elast. Stoß

$$\Leftrightarrow m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})$$

$$\Delta v_{1i} + v_{1f} = v_{2f}$$

Einsetzen in (*) $\Delta \frac{m_1}{m_2} (v_{1i} - v_{1f}) = v_{1i} + v_{1f}$

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot v_{1i} \quad \text{und} \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) \cdot v_{1i}$$

[6-5]

mit reduzierter Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$\Delta v_{2f} = \frac{2\mu}{m_2} \cdot v_{1i}$$

(i) $m_1 = m_2 \quad \Delta v_{1f} = 0 \quad v_{2f} = v_{1i}$

(ii) $m_1 \ll m_2$
(Fahrer auf PKW) $\Delta v_{1f} \approx -v_{1i} \quad v_{2f} \approx \frac{2m_1}{m_2} \cdot v_{1i} \approx 0$

(iii) $m_1 \gg m_2$
(LKW auf PKW) $\Delta v_{1f} \approx v_{1i} \quad v_{2f} = 2 v_{1i}$

- v_{cm} bewegt sich gleichförmig weiter!

⑥ Elastischer Stoß in 1D, Objekt 2 ruht nicht

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

[6-6]

6.5.2 Inelastische Stöße

Ein Teil der kinetischen Energie wird jetzt in Wärme und/oder Deformation umgewandelt.

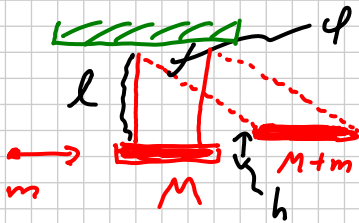
- maximal inelastisch: m_1 und m_2 „kleben“ nach dem Stoß aneinander

$$\hookrightarrow m_1 \cdot \vec{v}_{1i} + m_2 \cdot \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_f$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_{cm}$$

$$(\text{in 1D mit } v_{2f} = 0 \hookrightarrow v_f = v_i \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right))$$

Beispiel: Ballistisches Pendel (Projektile trifft Pendel)

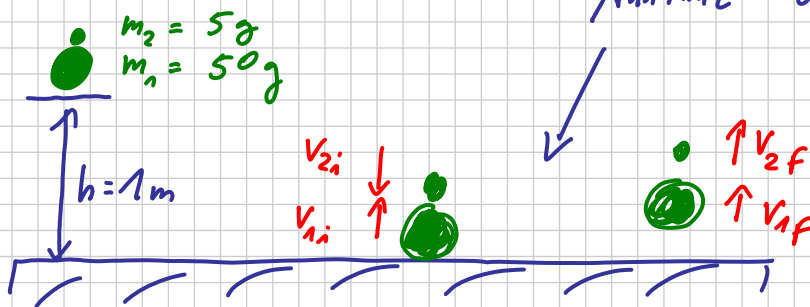


$$\Delta E_{pot} = (M+m) \cdot g \cdot h$$

$$\hookrightarrow E_{kin}^f \sim 0,1 \% E_{kin}^i$$

Rest geht in Deformation und Wärme

Beispiel: Zwei Flummis übereinander („Astro-Blister“)



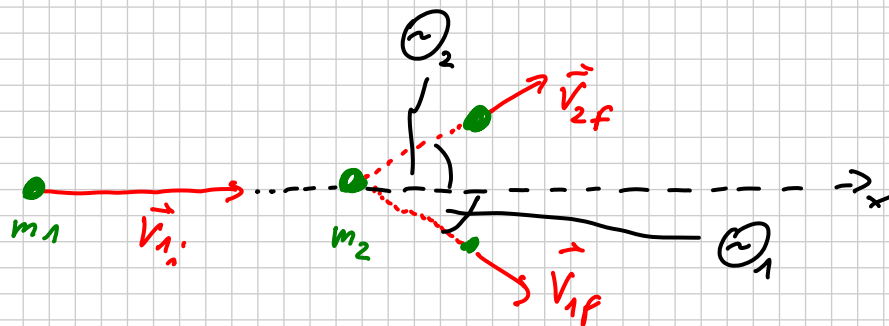
$$v_{1i} = \sqrt{2gh} = 4,4 \text{ m/s}$$

$$\text{aus [6-6]} \hookrightarrow v_{2f} = \frac{2 \cdot 50g}{55g} \cdot v_{1i} + \frac{-45g}{55g} (-v_{1i})$$

$$\hookrightarrow v_{2f} \approx 3 \cdot v_{1i}$$

$$\hookrightarrow h_{2f} = \frac{v_{2f}^2}{2g} = \frac{9 \cdot v_{1i}^2}{2g} = 9 \cdot h_{2i}$$

6.5.3 Stöße in zwei Dimensionen



Wähle Koordinatensystem so, dass

$$\vec{v}_{1i} = |\vec{v}_{1i}| \cdot \vec{e}_x \quad \vec{v}_{2i} = 0 \quad p_{1i} = |\vec{p}_{1i}|$$

$$\hookrightarrow \underline{p_{1i}} = \underline{p_{1f}} \cdot \cos \underline{\Theta_1} + \underline{p_{2f}} \cdot \cos \underline{\Theta_2} \quad \{ x\text{-Komponente } \vec{p}$$

$$\underline{0} = \underline{p_{1f}} \cdot \sin \underline{\Theta_1} + \underline{p_{2f}} \cdot \sin \underline{\Theta_2} \quad \{ y\text{-Komponente } \vec{p}$$

$$\text{elastisch: } \hookrightarrow \frac{1}{2} \underline{m_1} \underline{v_{1i}}^2 = \frac{1}{2} \underline{m_1} \underline{v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} \underline{m_2} \underline{v_{2f}}^2 \quad \{ \text{Erhaltung } E_{\text{kin}}$$

$\hookrightarrow$ 7 Variable, 3 Gleichungen $\hookrightarrow$ 4 Werte müssen bekannt sein

Beispiel: $m_1 = m_2 = m$, elastischer Stoß

m überall kürzen, Impulsgleichungen quadrieren

$$\left| \underline{v_{1i}}^2 = \underline{v_{1f}}^2 \cdot \cos^2 \underline{\Theta_1} + 2 \underline{v_{1f}} \underline{v_{2f}} \cdot \cos \underline{\Theta_1} \cos \underline{\Theta_2} + \underline{v_{2f}}^2 \cdot \cos^2 \underline{\Theta_2} \right.$$

$$\left| \underline{0} = \underline{v_{1f}}^2 \cdot \sin^2 \underline{\Theta_1} - 2 \underline{v_{1f}} \underline{v_{2f}} \cdot \sin \underline{\Theta_1} \sin \underline{\Theta_2} + \underline{v_{2f}}^2 \cdot \sin^2 \underline{\Theta_2} \right.$$

Addieren und Energiegleichung $\underline{v_{1i}}^2 = \underline{v_{1f}}^2 + \underline{v_{2f}}^2$ substituieren

$$\hookrightarrow \cos(\underline{\Theta_1} + \underline{\Theta_2}) = 0$$

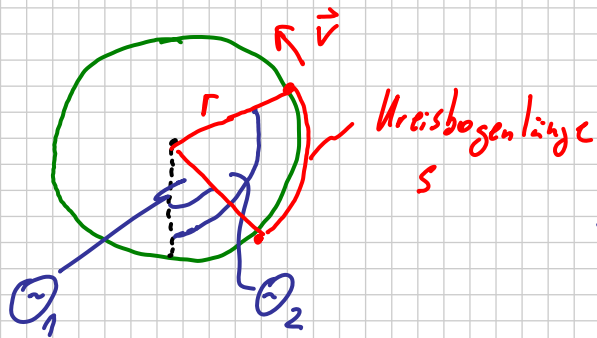
$$\hookrightarrow \underline{\Theta_1} + \underline{\Theta_2} = 90^\circ$$

7. Drehbewegungen

7.1 Definitionen

Radius und Winkel beschreiben den Ort

② Drehwinkel $\Delta\Theta$



$$\Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1 = \frac{s}{r}$$

Die Einheit des Drehwinkel ist das Bogenmaß (rad)

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\rightarrow 1 \times 10^{-3} \text{ rad} \hat{=} 1 \text{ mrad} \hat{=} 0,057^\circ$$

Der Drehwinkel kann auch $> 2\pi$ werden

⑥ Winkelgeschwindigkeit ω („omega“)

$$\bullet \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = \frac{d\Theta}{dt}$$

• $\vec{\omega}$ zeigt senkrecht zur Rotationssebene

(Rechte-Hand-Regel:



• Die Einheit von ω ist rad/s

$$\bullet s = \Delta\Theta \cdot r \rightarrow v = \frac{ds}{dt} = \omega \cdot r \quad (r = \text{const.})$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

[7-1]

© Umlaufzeit (Periode) T und Frequenz ω

16.11.2010

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{1}{\omega}$$

[7-2]

Die Einheit der Frequenz ist 1 Hertz
 $= 1 \text{ Hz} = 1 \text{ Umdrehung/s}$

ω "NÜ"

④ Winkelbeschleunigung α

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \quad (\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt})$$

Tangential Komponente $a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha \cdot r \quad (\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r})$

Radial Komponente $a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r \quad (\text{Zentripetalbesch.})$

$\Delta\varphi$, ω und α sind für alle Punkte eines rotierenden Körpers gleich. (unabhängig von der Entfernung zur Drehachse)

Beispiel: Computer-Festplatte, 7200 U/min

$$\text{Frequenz } \omega = \frac{7200 \text{ U/min}}{60 \text{ s/min}} = 120 \frac{\text{U}}{\text{s}} \hat{=} 120 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi \cdot \omega = 753 \text{ rad/s}$$

Kopf vom Zentrum 3 cm entfernt

$$\hookrightarrow v = R \cdot \omega = 3 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot 753 \text{ rad/s} = 22,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{=} 81 \text{ km/h}$$

(Kopf dabei etwa 10-20 nm von Oberfläche entfernt)

7.2 Bewegungsgleichungen

Translation

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s$$

Rotation

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \varphi$$

7.3 Kinetische Energie bei der Rotation

(i) Für einen Massepunkt

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (r \cdot \omega)^2 = \frac{1}{2} \underline{m r^2} \cdot \underline{\omega^2}$$

$$\text{Translation} = \frac{1}{2} \underline{m} \cdot \underline{v^2}$$

$I = m \cdot r^2$ nennt man das Massenträgheitsmoment oder Trägheitsmoment.

(ii) Für ein System aus n Massepunkten

$$E_{\text{rot}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i r_i^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

$r_i \hat{=}$ Abstand des Punktes i von Drehachse

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Beispiele

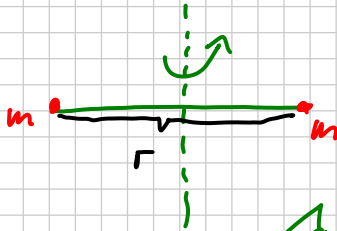
(a)



Drehung um Verbindungsachse

$$\rightarrow I = 0$$

(b)

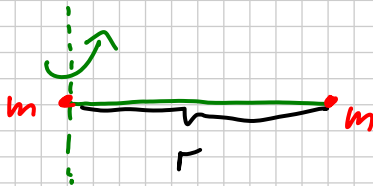


Drehung senkrecht zur Verbindungsachse

Drehachse bei $r/2$

$$\rightarrow I = m \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 + m \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m r^2$$

(c)



Drehachse durch einen der Massepunkte

$$\rightarrow I = m \cdot r^2 + 0 = m r^2$$

- Die Angabe eines Trägheitsmoments ist nur sinnvoll, wenn man auch die Lage der Drehachse angibt.

(iii) Homogene Körper

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

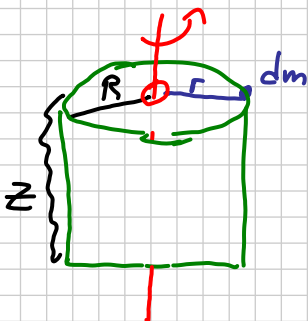
[7-3]

$$I = \int r^2 dm = \rho \cdot \int r^2 dV$$

[7-4]

$\rho \hat{=}$ homogene Dichte, z.B. 1 kg/cm^3

(a) Scheibe / Zylinder dicht um Symmetrieachse



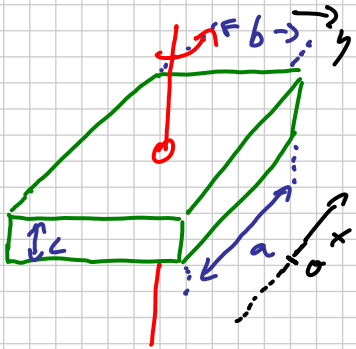
$$I = \int r^2 dm = \rho \cdot \int r^2 dV$$

$$= \rho \cdot \int_0^z \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \underbrace{r dr dz d\varphi}_{\text{Zylinderkoordinaten}}$$

$$= 2\pi \cdot z \cdot \rho \cdot \int_0^R r^3 dr = 2\pi \cdot z \cdot \rho \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M \cdot R^2$$

$$M = \pi \cdot r^2 \cdot z \cdot \rho$$

⑥ Rechteckige Platte dreht um Mittelpunkt



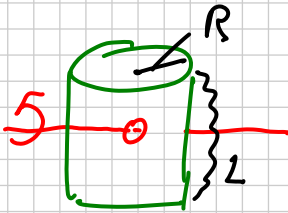
$$I = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$= \rho \cdot \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_0^c (x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$= \rho \cdot c \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} (x^2 + y^2) dx dy = \rho \cdot c \int_{-b/2}^{+b/2} \left(\frac{a^3}{12} + a \cdot y^2 \right) dy$$

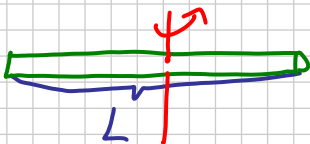
$$= \rho \cdot c \cdot \left(\frac{a^3 \cdot b}{12} + \frac{b^3 \cdot a}{12} \right) = \rho \cdot c \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12} \right) = \frac{1}{12} \cdot M \cdot (a^2 + b^2)$$

⑦ Scheibe / Zylinder dreht um Achse senkrecht zur Symmetrieachse, durch Schwerpunkt



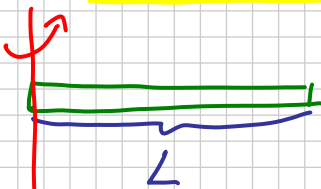
$$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

⑧ Langer Stab dreht um Achse ⊥ Symmetrieachse durch Schwerpunkt



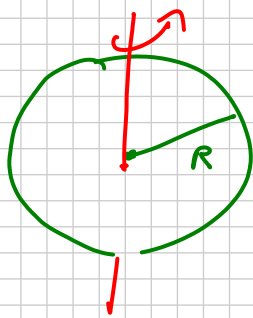
$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

⑨ Langer Stab dreht um Achse durch ein Ende



$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

⑦ Kugel dreht um Symmetrieachse

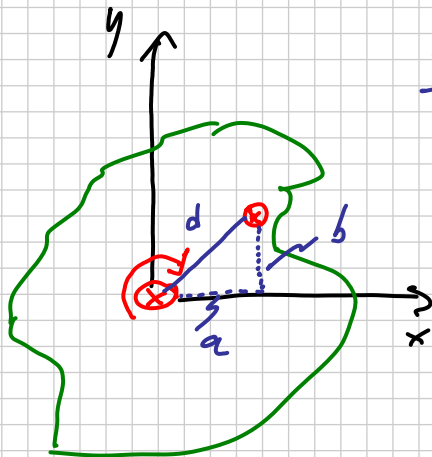


Vollkugel: $I = \frac{2}{5} M R^2$

Hohlkugel: $I = \frac{2}{3} M R^2$

• Steiner'scher Satz

Man nennt Trägheitsmoment I_A bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt. Wie groß ist I_B bezüglich einer dazu parallelen Achse im Abstand d ?



$$I_B = \int ([x-a]^2 + [y-b]^2) dm$$

$$= \underbrace{\int (x^2 + y^2) dm}_{I_A} - \underbrace{2a \int x dm}_0 - \underbrace{2b \int y dm}_0 + \underbrace{\int (a^2 + b^2) dm}_{M \cdot \underbrace{(a^2 + b^2)}_{d^2}}$$

Definition des Schwerpunkts



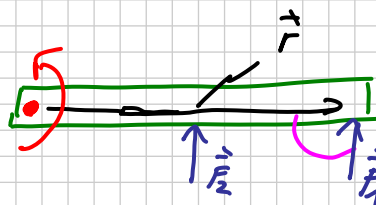
$$I_B = I_A + M \cdot d^2$$

[7-5]

7.4 Drehmoment

17.11.2010

Beispiel: Öffnen einer Tür



$$\text{Drehmoment} \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

[7-6]

(auch $\vec{M}$ oder Torque oder $\vec{D}$)

$$|\vec{\tau}| = r \cdot F \cdot \sin \angle(\vec{r}, \vec{F}) \quad \text{Die Einheit ist Nm.}$$

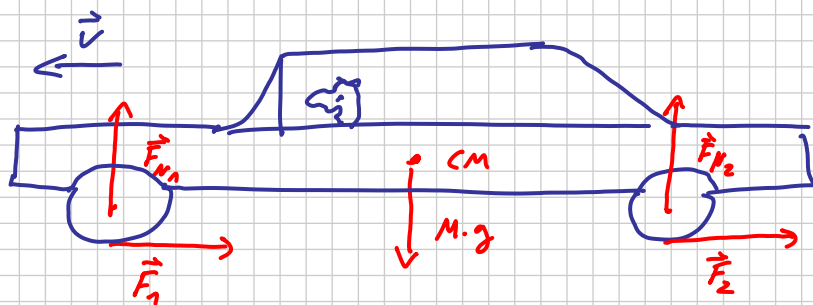
Das Drehmoment führt zu einer Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$.

$$\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}$$

[7-7]

Dies entspricht dem zweiten Newton'schen Axiom $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Beispiel: Warum werden Vorderräder beim Bremsen mehr belastet?



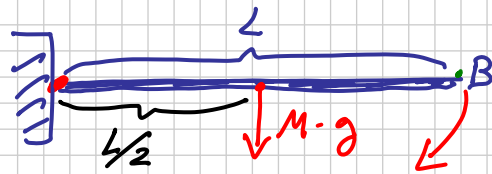
groß beim Bremsen

$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_{N_2}$ bewirken Drehmoment gegen den Uhrzeigersinn um den Schwerpunkt

$\vec{F}_{N_1}$ muss kompensieren $\rightarrow F_{N_1} > F_{N_2}$

(typisch $F_{N_1} \sim (1,5-2) F_{N_2}$)

Beispiel:



$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{M \cdot g \cdot \frac{L}{2}}{\frac{1}{3} M L^2} \quad \leftarrow \text{siehe 7.3 (e)}$$

$$\hookrightarrow \alpha = \frac{3}{2} \cdot g / L$$

Tangentialbeschleunigung am Ende der Stange (an Punkt B):

$$a_{\text{tan}} = \alpha \cdot r = \alpha \cdot L = \frac{3}{2} \cdot g$$

$\hookrightarrow$ Beschleunigung ist $> g$

7.5 Drehimpuls

Wenn sich ein Massepunkt mit dem Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ auf einer beliebigen Bahn $\vec{r}(t)$ bewegt, definiert man einen Drehimpuls in Bezug auf den Koordinatenursprung:

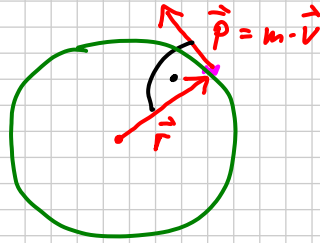
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

[7-8]

$$L_x = y p_z - z p_y \quad L_y = z p_x - x p_z \quad L_z = x p_y - y p_x$$

- Man kann $\vec{L}$ immer definieren, speziell bei Kreisbewegungen gilt:

↳ $\vec{L}$ zeigt aus Ebene hinaus,
parallel zu $\vec{\omega}$



$$|\vec{L}| = m \cdot r \cdot v = m r^2 \cdot \omega = I \cdot \omega$$

[7-9]

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \leftrightarrow \vec{p} = h \cdot \vec{v}$$

- Was bewirkt Änderung des Drehimpulses?

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right) \\ &= \underbrace{(\vec{v} \times m \cdot \vec{v})}_0 + \underbrace{(\vec{r} \times \vec{F})}_{\vec{\tau}} \end{aligned}$$

↳ $\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{\tau}$ oder allgemeiner

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}$$

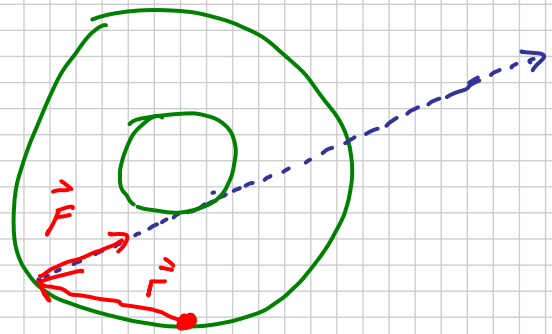
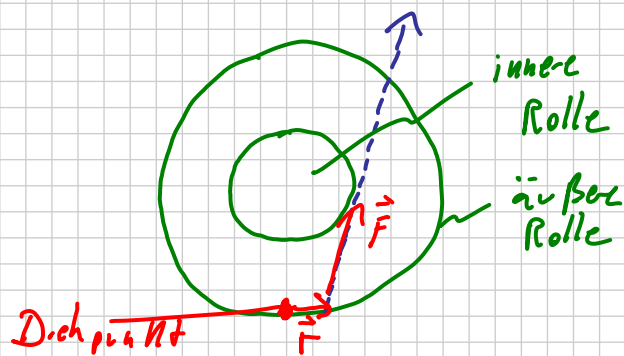
[7-10]

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem totalen wirkenden Drehmoment.

↳ $\vec{L} = \text{const.}$ wenn $\vec{\tau} = 0$

↳ $I \cdot \vec{\omega} = \text{const.}$ wenn $\vec{\tau} = 0$ (gilt nur für best. mte Drehachsen)

Beispiel: Je nach Zugwinkel rollt eine Gerolle auf einem zu oder von einem Weg (Drehung um Auflagepunkt!)



steiler Winkel zum Boden

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \text{ zeigt}$$

aus Ebene raus
 $\rightarrow$ rollt weg

flacher Winkel

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \text{ zeigt in Ebene hinein}$$

$\rightarrow$ rollt heran

Beispiel: Rotation eines Neutronensterns

vorher: z.B. Sterncore mit $R_i = 2 \times 10^8 \text{ m}$
 1 Drehung um die eigene Achse / Monat

$$\omega_i = \frac{1 \text{ Umdrehung}}{30 \text{ Tagen} \cdot 86400 \text{ s/Tag}} \approx 4 \times 10^{-7} \text{ U/s}$$

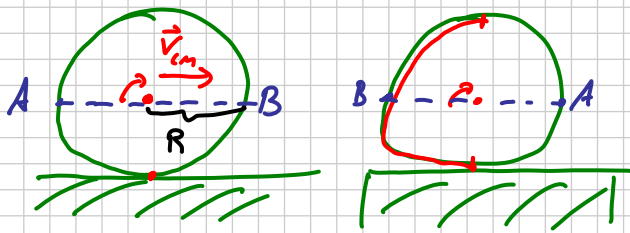
nachher: $R_f = 5000 \text{ m}$

$$I_i \cdot \omega_i = I_f \cdot \omega_f$$

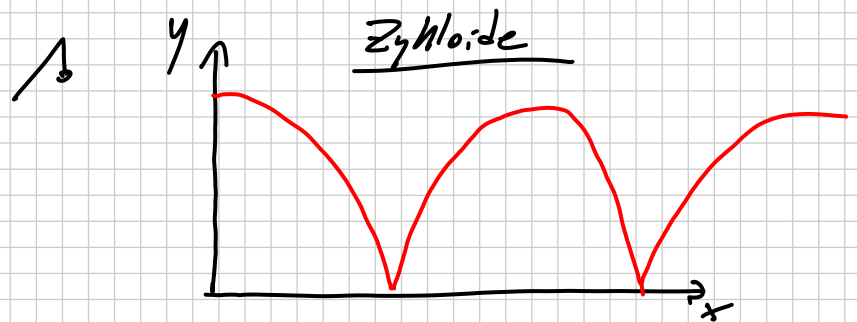
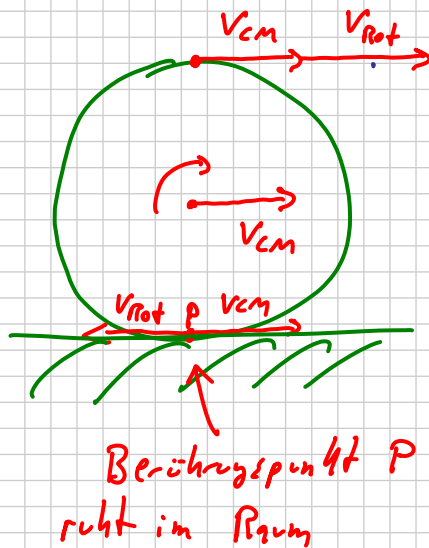
$$\omega_f = \left(\frac{I_i}{I_f} \right) \cdot \omega_i = \left(\frac{\frac{2}{5} M \cdot R_i^2}{\frac{2}{5} M \cdot R_f^2} \right) \cdot \omega_i \approx 600 \text{ U/s}$$

"Pulsare"

7.6 Rollbewegungen (Rotation + Translation)



Auf den Boden zurückgedr.
Strecke: Kreisbogen $\pi \cdot R$
mit Linear-geschwindigkeit: $v_{cm} = \omega \cdot R$



Man kann die Bewegung auch als reine Rotation
um den Punkt P beschreiben

$$E_{kin, Roll} = \frac{1}{2} I_P \cdot \omega^2 \quad \text{mit} \quad I_P = I_{cm} + M \cdot R^2$$

↑
Trägheitsmoment um P
↑
Steiner'sche Satz

$$\hookrightarrow E_{kin, Roll} = \frac{1}{2} (I_{cm} + MR^2) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M \cdot \underbrace{(R \cdot \omega)^2}_{v_{cm}^2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{E_{kin, Roll} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \cdot \omega^2} \quad [7-M]$$

mit $I_{cm} \hat{=}$ Trägheitsmoment bzgl. des Schwerpunkts

Beispiel: Dosen rollen Rampe runter

Am Anfang: $E_{\text{mech},i} = E_{\text{pot}} = M \cdot g \cdot h$

Am Ende: $E_{\text{mech},f} = \frac{1}{2} M \cdot v_f^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \cdot \omega^2$
 $= \frac{1}{2} v_f^2 \cdot \left(M + \frac{I_{\text{cm}}}{R^2} \right)$

ohne Reibung: mechanische Energieerhaltung

$\hookrightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot M \cdot g \cdot h}{M + I/R^2}}$ $\hookrightarrow I_{\text{klein}} \rightarrow v_f \text{ groß}$
 $I_{\text{groß}} \rightarrow v_f \text{ klein}$

z.B. Vollzylinder: $I = \frac{1}{2} M R^2 \quad \hookrightarrow v_f = \sqrt{\frac{4}{3} g \cdot h}$

Hohlzylinder: $I = M R^2 \quad \hookrightarrow v_f = \sqrt{g \cdot h}$

7.7 Der Trägheitstensor

23.11.2010

Bisher stand der Drehimpuls $\vec{L}$ immer parallel zu $\vec{\omega}$

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

$\hookrightarrow$ Trägheitsmoment als Skalar

Für eine beliebige Lage der Drehachse: (siehe [7-5]:

$$d\vec{L} = dm (\vec{r} \times \vec{v}) = dm (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \quad \vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$
$$= dm (\vec{r}^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{r})$$

$\hookrightarrow \vec{L} = \int \left[\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2) \cdot \vec{\omega}}_{\text{Anteil parallel zu } \vec{\omega}} - \underbrace{(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \cdot \vec{r}}_{\text{zusätzlicher Anteil}} \right] dm$

Definiere: $I_{xx} = \int \underbrace{(r^2 - x^2)}_{y^2 + z^2} dm$ $I_{yy} = \int (r^2 - y^2) dm$

$I_{zz} = \int (r^2 - z^2) dm$

$I_{xy} = I_{yx} = - \int xy dm$

$I_{yz} = I_{zy} = - \int yz dm$

$I_{xz} = I_{zx} = - \int xz dm$

$$\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

[7-12]

$$\vec{l} = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega}$$

mit $\bar{\bar{I}} \hat{=} \text{Trägertensor}$ (symmetrisch)

- I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} entsprechen den Trägertmomenten bei Rotation um die Koordinatenachsen

↳ Transformation in ein anderes Koordinatensystem (Diagonalisierung)

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Die Achsen dieses Koordinatensystems nennt man Hauptträgertachsen. Man wählt die

Achsen so, dass $I_1 \leq I_2 \leq I_3$.

Die Hauptträgertachsen sind häufig die Symmetrieachsen des rotierenden Körpers.

- Nur Rotationen um die Achsen mit dem größten oder kleinsten Trägheitsmoment sind stabil. Bei allen anderen Rotationen treten Kräfte im Lager auf (bzw. es stellt sich eine andere Achse ein)

7.8 Der Kreisel

Ⓐ Kräftefreier, symmetrischer Kreisel

- Kein äußeres Drehmoment $\rightarrow$ „Kräftefrei“

$\swarrow$ Lagerung im Massenmittelpunkt

- $I_1 = I_2 \neq I_3 \rightarrow$ „symmetrisch“

- Körper sei rotationssymmetrisch

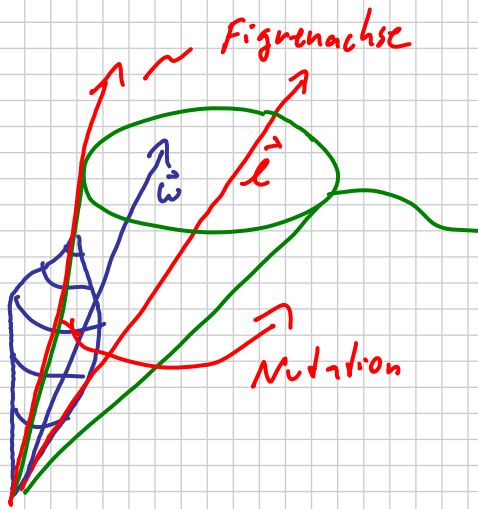
$\rightarrow$ Figurenachse = Drehachse

$\swarrow$ Die Drehimpulsachse $\vec{L}$ steht wegen

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \text{ (Drehimpulserhaltung) fest im Raum}$$

$\rightarrow$ Nutzung als Kreisel oder künstliche Horizont
(voll Mar. dänische Aufhängung) $\neq$ Kreiselkompass

- Gebe Schlag auf diesen Kreis senkrecht zur Drehimpulsachse $\rightarrow$ Drehmoment
 $\rightarrow$ Änderung Drehimpuls $\Delta \vec{L} = \int \vec{\tau} dt$
 $\rightarrow \vec{L}$ nicht mehr parallel zur Figurenachse
 $\rightarrow$ Da $\vec{L}$ fest im Raum steht, dreht sich die Figurenachse um $\vec{L} \rightarrow$ NUTATION



- $\rightarrow \vec{\omega}$ hat Komponente von Rotation um Körperachse plus Komponente von Nutation

Nutationskegel

Öffnungswinkel kann man

berechnen aus Trägheitsmomenten des

Körpers um verschiedene Achse und

$\omega_{||}$ und $\omega_{\perp}$ (Anteil von ω parallel und senkrecht zur Körperachse)

⑥ Kreis mit äußerem Drehmoment

z.B. Kreis ist nicht im Schwerpunkt gelagert
 (Fahrradfelge nur an eine Seite fixiert)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times m \cdot \vec{g}$$

$\vec{r}$ Vektor vom Lagerpunkt zum Schwerpunkt

$\vec{\tau} \perp \vec{L}$, Betrag von $\vec{L}$ bleibt konstant,
 aber die Richtung ändert sich

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = |\vec{L}| \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

$\rightarrow$ Die Drehimpulsrichtung dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\tau}{|\vec{L}|} = \frac{\tau}{I \cdot \omega}$$

↗ PRÄZSSION

ω_p = Präzessionsfrequenz

7.9 Die Keplerschen Gesetze

24.11.2010

Vermessung von Planetenbahnen (Tycho Brahe, 1546-1601)

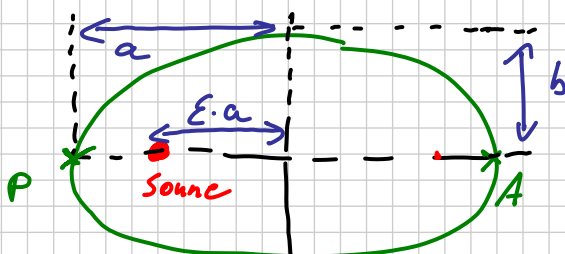
↗ Gesetze (Johannes Kepler, 1571-1630)

- Erstes Keplersches Gesetz:

„Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne. Die Sonne steht in einem Brennpunkt dieser Ellipse.“

(Ableiten aus Energieerhaltung $E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$

und Drehimpulserhaltung)



$a \hat{=}$ große Halbachse

$b \hat{=}$ kleine Halbachse

$\epsilon \hat{=}$ Exzentrizität

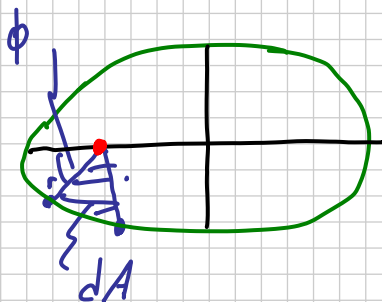
$P \hat{=}$ Perihel (sonnennächster Punkt)

$A \hat{=}$ Aphel (sonnenfernster Punkt)

- Eigentlich drehen die Planeten um den Schwerpunkt des Systems Sonne - Planet, aber $m(\text{Sonne}) \gg m(\text{Planet})$
- Die Exzentrizität der Erdbahn um die Sonne ist sehr klein im Bereich von 2% (hat nichts mit Jahreszeiten zu tun)

• Zweites Keplersches Gesetz

- "Eine gedachte Verbindungslinie zwischen Planet und Sonne überstreicht die gleiche Fläche in gleicher Zeit für jeden Abschnitt der Planetenbahn."



$$\frac{dA}{dt} \stackrel{!}{=} \text{const} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} \underline{r^2 \cdot \omega}$$

$$\text{mit } L = r \cdot m \cdot v = r \cdot m \cdot \omega \cdot r = \underline{m r^2 \omega}$$

$$\hookrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const. wg. Drehimpulserhaltung}$$

• Drittes Keplersches Gesetz

- "Das Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse seiner Umlaufbahn: $T^2 \propto a^3$

Näherungsweise $a \approx b \approx r$

Gravitationskraft hält Planet auf Kreisbahn

↳ muss der Zentripetalkraft entsprechen

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \omega^2 \cdot r \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

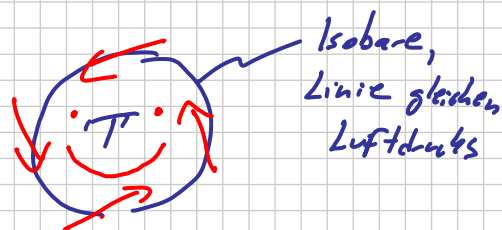
Massen
der Sonne M
des Planeten m

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G \cdot M} \right) \cdot r^3$$

Umlaufzeit hängt nur von der Masse des Zentralkörpers und vom Radius r der Umlaufbahn ab.
(gilt auch für Ellipse)

7.10 Rotierende Bezugssysteme und Corioliskraft

Warum strömt der Wind nicht auf direktem Wege in ein Tiefdruckgebiet?



- Im Labor-system (Inertialsystem, nicht beschleunigt)

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y + z(t) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{e}_z$$

- Ein zweites System rotiere relativ zum Laborsystem mit $\vec{\omega}$

$$\vec{r}^R(t) = x^R(t) \cdot \vec{e}_x^R + y^R(t) \cdot \vec{e}_y^R + z^R(t) \cdot \vec{e}_z^R$$

$$\vec{v}^R(t) = \frac{dx^R}{dt} \cdot \vec{e}_x^R + \frac{dy^R}{dt} \cdot \vec{e}_y^R + \frac{dz^R}{dt} \cdot \vec{e}_z^R$$

- Beide Systeme sollen einen gemeinsamen Ursprung haben: $\vec{r}(t) = \vec{r}^R(t)$

Leite beide Seiten nach der Zeit ab. **Achtung:**

Im rotierenden System sind die Einheitsvektoren nicht konstant.

$$\vec{v} = \left(\frac{dx^R}{dt} \cdot \vec{e}_x^R + \frac{dy^R}{dt} \cdot \vec{e}_y^R + \frac{dz^R}{dt} \cdot \vec{e}_z^R \right) + \left(x^R \cdot \frac{d}{dt} \vec{e}_x^R + y^R \cdot \frac{d}{dt} \vec{e}_y^R + z^R \cdot \frac{d}{dt} \vec{e}_z^R \right)$$

nicht konstante Einheitsvektoren

- Für die Beschleunigung $\vec{a}$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2 x^R}{dt^2} \cdot \vec{e}_x^R + \frac{d^2 y^R}{dt^2} \cdot \vec{e}_y^R + \frac{d^2 z^R}{dt^2} \cdot \vec{e}_z^R \right) + \underbrace{2 \cdot \left(\frac{dx^R}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_x^R}{dt} + \frac{dy^R}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_y^R}{dt} + \frac{dz^R}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_z^R}{dt} \right)}_{\vec{a}^R}$$

$$+ \left(x^R \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{e}_x^R + y^R \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{e}_y^R + z^R \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{e}_z^R \right)$$

zusätzliche
Terme durch
Rotation des
Bezugsystems

Setze ein:

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_x^R = \vec{\omega} \times \vec{e}_x^R$$

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_y^R = \vec{\omega} \times \vec{e}_y^R$$

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_z^R = \vec{\omega} \times \vec{e}_z^R$$

Dies gilt für beliebige
rotierende Vektoren,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \vec{a}^R + 2 \cdot \vec{\omega} \times \underbrace{\left(\frac{dx^R}{dt} \cdot \vec{e}_x^R + \frac{dy^R}{dt} \cdot \vec{e}_y^R + \frac{dz^R}{dt} \cdot \vec{e}_z^R \right)}_{\vec{v}^R} \\
 &\quad + \vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \underbrace{\left(x^R \cdot \vec{e}_x^R + y^R \cdot \vec{e}_y^R + z^R \cdot \vec{e}_z^R \right)}_{\vec{r}^R} \right] \\
 &= \vec{a}^R + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}^R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^R)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}^R = \vec{a} - 2 \vec{\omega} \times \vec{v}^R - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^R)$$

Wirkt auf einen Körper mit der Masse m im Inertialsystem eine Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, so spürt ein Beobachter im rotierenden Bezugssystem eine Kraft:

$$\vec{F}^R = m \cdot \vec{a}^R = \vec{F} - 2 \cdot m (\vec{\omega} \times \vec{v}^R) - m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^R) \quad [7-13]$$

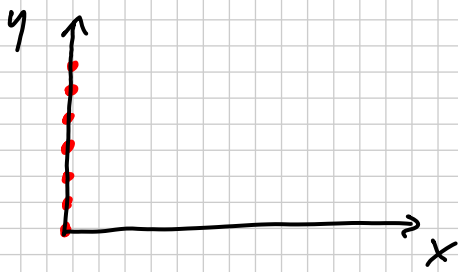
- $\vec{F}_{\text{Zentrifugal}}^R = -m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^R)$ „Zentrifugalkraft“

(Autofahrer wird in Kurve gegen Tür gedrückt. Von außen: Autofahrer will Tangentialgeschwindigkeit folgen)

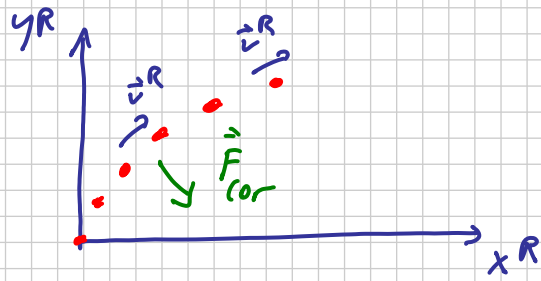
- $\vec{F}_{\text{Coriolis}}^R = -2m \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}^R)$ „Corioliskraft“
 $= +2m \cdot (\vec{v}^R \times \vec{\omega})$

(Proportional zu $\vec{v}^R$, der Körper muss sich im rotierenden System bewegen)

Betrug: $\left| \vec{F}_{\text{Coriolis}}^R \right| = 2 \cdot m \cdot v^R \cdot \omega \cdot \sin \angle (\vec{v}^R, \vec{\omega})$

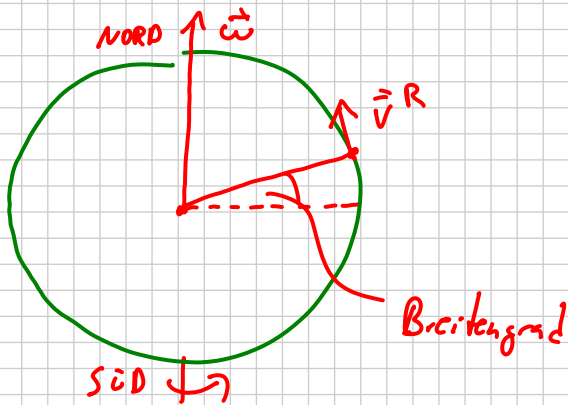


Im ruhenden System:
Kugel rollt entlang y



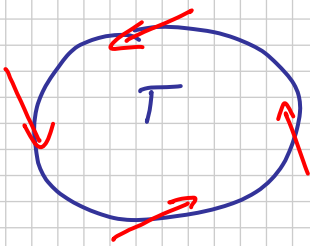
Im rotierenden System:
Gekrümmte Bahn

Beispiel Erde:



↙ Ablenkung auf Nordhalbkugel
immer nach rechts
(rechte Hand Regel)
Corioliskraft verschwindet
am Äquator

↙ $\vec{v}^R$ von SÜD nach NORD → Ablenkung nach OST
NORD nach SÜD → " " " WEST



↙ Wind weht um ein Tief
nahezu tangential zu den
Isobaren ($10^\circ - 30^\circ$) gegen
Uhrzeigersinn.

• Auf Nordhalbkugel:

- Flussufer rechts mehr erodiert sein ✓ (Einstein-Paper 1926)
- Bahnschienen rechts mehr abgenutzt ✓ (aber weniger
in Fahrtrichtung Effekt gegen Kurvenfahrt)
- Badezimmerablauf ? (nur bei extrem optimalen Bedingungen)