4. Kräfte

4.1 Das erste Newtonsche Axiom

Bisher: Beschreibung der Bewegung
Jetzt: Frage nach der Ursache

- Sir Isaac Newton (1642 – 1727)

  KRAFT ist die Ursache für Bewegung

  ↳ „Newtonsche Mechanik"

Diese gilt nicht für sehr hohe Geschwindigkeiten ($v \sim c$ (Lichtgeschwindigkeit)) und für Quantensysteme.

Erstes Axiom:

„Jeder Körper verharrt in seinem Bewegungszustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn keine Gesamtkraft auf ihn wirkt."

[4-1]

gleichförmig $\hat{=}$ $v = \text{const.}$
geradlinig $\hat{=}$ keine Kreisbewegung
Gesamtkraft $\hat{=}$ Summe aller Kräfte

Die Newtonschen Axiome gelten nicht in allen Bezugssystemen, sondern nur in Inertialsystemen.
Das sind nicht-beschleunigte Bezugssysteme.

z.B. Erdoberfläche ist nur bei nicht zu großen Verschiebungen ein Inertialsystem, sonst wird die Erdrotation wichtig $\rightarrow$ „Scheinkräfte"

z.B. Viele Phänomene der Elektrodynamik

- Galilei – Transformation vom Inertialsystem B in ein Inertialsystem A, B bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ relativ zu A:

$$t = t_A = t_B$$

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{u} \cdot t$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{u}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B$$

4.2 Das zweite Newtonsche Axiom

Beobachtung: Bei gleicher Krafteinwirkung wird ein Objekt mit kleinerer Masse m_1 stärker beschleunigt, als ein Objekt mit der größeren Masse m_2.

Diese Masse hat zunächst nichts mit dem Gewicht eines Körpers zu tun. Man nennt sie auch die Träge Masse.

Diese Masse spürt man nur beim Versuch, einen Körper zu beschleunigen.

Zweites Axiom:

„Die Beschleunigung eines Körpers ist direkt proportional zu der auf ihn wirkenden Gesamtkraft und umgekehrt proportional zu seiner Masse"

$$\boxed{\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}} \qquad [4-2]$$

Dies gilt so nur wenn $m = const.$

- Die Einheit der Kraft ist

$$1\,N = 1\,kg \cdot \frac{m}{s^2} \qquad \text{„Newton"}$$

4.3 Das dritte Newtonsche Axiom

Kräfte tauchen immer in Paaren auf.

Drittes Axiom

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \\ \text{Aktio} = \text{Reaktio} \end{array}} \qquad [4-3]$$

Diese beiden Kräfte wirken auf verschiedene Objekte und heben sich daher nicht auf!

4.4 Einige spezielle Kräfte

(i) Gewichtskraft (auch „Gewicht", „Gravitationskraft")

$$\boxed{\vec{F}_G = m \cdot g}$$

[4-4]

$m \hat{=}$ schwere Masse

$g \hat{=}$ Erdbeschleunigung

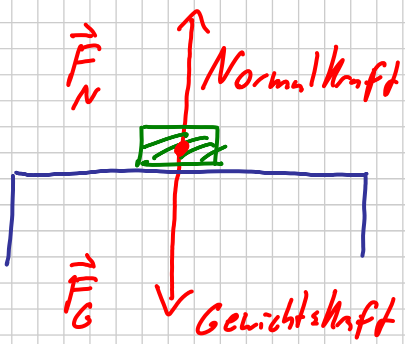
Eine „gewöhnliche" Waage zeigt diese Kraft an.

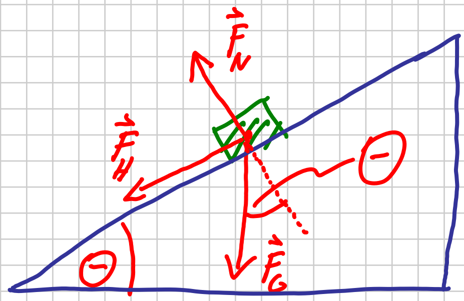
Die träge Masse und die schwere Masse eines Objekts sind gleich. („Äquivalenzprinzip")

(gemessen bis auf 10^{-13}, Allgemeine Relativitätstheorie)

(ii) Normalkraft und Hangabtriebskraft

Auf einen Körper, der in Kontakt mit einer Oberfläche ist, wirkt immer eine Kraft senkrecht zu dieser Oberfläche.





$$|\vec{F}_N| = |\vec{F}_G| \cdot \cos \Theta$$

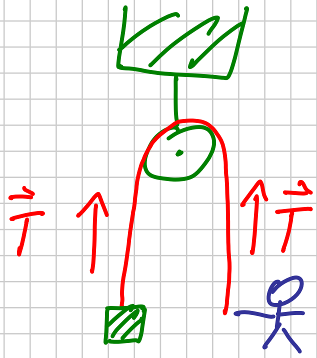
Hangabtriebskraft: $|\vec{F}_H| = |\vec{F}_G| \cdot \sin \Theta$

(iii) Zugspannung (Zugkraft, Kraft in einem Seil)

$T \hat{=}$ Tension

- 

Betrag der Zugspannung: $|\vec{T}|$

- 

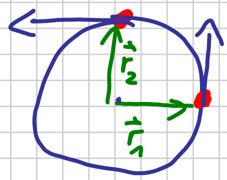
Auf die Rolle wirkt eine Kraft von $2 \cdot |\vec{T}|$

(Seil und Rolle sind masselos)

(iv) Zentripetalkraft

Körper mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit auf Kreisbahn

(Gleichförmige Kreisbewegung)



$|\vec{v}| = \text{const.}$ <u>aber</u> Richtung von $\vec{v}$ ändert sich

$\Rightarrow$ Objekt unterliegt einer Beschleunigung

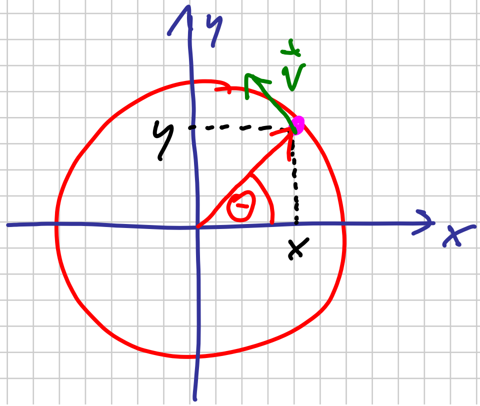
$\vec{v}$ steht immer senkrecht auf $\vec{r}$

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y$$

$$= -v \cdot \sin\Theta \cdot \vec{e}_x + v \cdot \cos\Theta \cdot \vec{e}_y$$

Einheitsvektor in x-Richtung

$|\vec{e}_x| = 1$



26.10.2010

ersetzen: $\sin\Theta = \frac{y}{r}$ $\cos\Theta = \frac{x}{r}$

$$\curvearrowright \vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = -v\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right)\cdot\vec{e}_x + v\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right)\cdot\vec{e}_y$$

$r = const.$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y = const.$

$$\vec{a} = -\frac{v}{r}\cdot\vec{e}_x\cdot \underbrace{v_y}_{v\cdot\cos\Theta} + \frac{v}{r}\cdot\vec{e}_y\cdot \underbrace{v_x}_{-v\cdot\sin\Theta}$$

$$= -\frac{v^2}{r}\cdot\cos\Theta\cdot\vec{e}_x + \frac{v^2}{r}(-\sin\Theta)\cdot\vec{e}_y$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \frac{v^2}{r}\cdot\sqrt{\underbrace{\cos^2\Theta + \sin^2\Theta}_{1}} = \frac{v^2}{r}$$

mit $(\vec{e}_x)^2 = (\vec{e}_y)^2 = 1$ $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = 0$ $\perp$ stehen senkrecht aufeinander

$\vec{a}$ zeigt immer in Richtung Kreismittelpunkt

- Nach dem zweiten Newtonschen Axiom ist mit dieser Beschleunigung eine Kraft verbunden

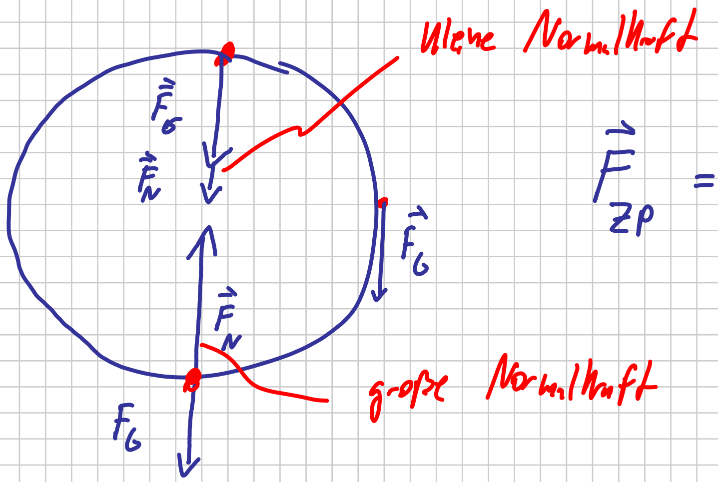
$$\boxed{\vec{F}_{zp} = m\cdot\vec{a} = -m\frac{v^2}{r}\cdot\vec{e}_r}$$ [4-5]

$$|\vec{F}_{zp}| = \frac{m\cdot v^2}{r}$$

Es gibt keine Kraft, die das Objekt auf der Kreisbahn nach außen ziehen will. Diese Zentrifugalkraft spürt man nur im rotierenden Bezugssystem. (z.B. Zentrifuge)

Ein Objekt fliegt deshalb auch <u>nicht</u> radial nach außen, wenn man es los lässt.

<u>Beispiel</u>: Wie schnell muss eine Radfahrerin am Scheitelpunkt eines 6 m hohen Loopings fahren



$$\vec{F}_{ZP} = \vec{F}_G + \vec{F}_N$$

- Am Scheitelpunkt gilt:

$$F_G + F_N = F_{ZP} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$ (alle Kräfte zeigen in die gleiche Richtung)

- Damit sie gerade noch oben bleibt: $F_N = 0$

$$\Rightarrow \quad F_G = \cancel{m} \cdot g = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow v_{Scheitelpunkt} = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 3m}$$

$$= 5{,}4 \ m/s$$

- Am Boden des Loopings wirkt die größte Kraft auf die Fahrerin

$$F_N = m \cdot g + \frac{mv^2}{r}$$

- v am tiefsten Punkt $\sim 12 \frac{m}{s} \mathrel{\hat{=}} 43 \ km/h$

(V) Federkraft

Robert Hooke (1635–1703)

„UT TENSIO SIC VIS"

(Die Kraft verhält sich wie die Dehnung der Feder)

CEIIINOSSSTTUV (Anagramm)

$$\boxed{F_F = -k \cdot x} \qquad [4\text{-}6]$$

x ≙ Dehnung der Feder

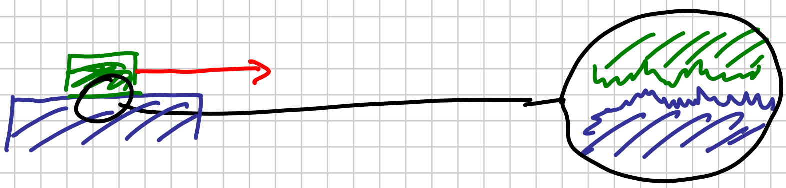
k ≙ Federkonstante

- mehrere Federn hintereinander: $\frac{1}{k_{ges}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots$

- mehrere Federn parallel: $k_{ges} = k_1 + k_2 + k_3 + \dots$

(VI) Reibungskräfte

ⓐ Haft- und Gleitreibung

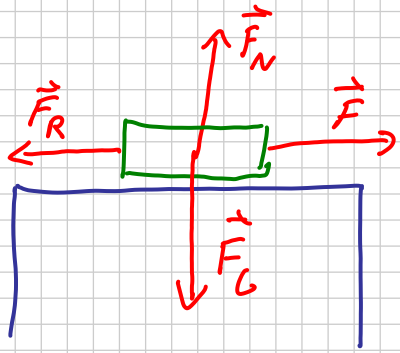


Mikroskopisch rauhe Berührungsflächen

Es ist schwerer einen Körper in Bewegung zu bringen, als ihn in Bewegung zu halten.

$\Rightarrow$ Haftreibung > Gleitreibung

- Die Reibungskraft $\vec{F}_R$ zeigt immer parallel zu den beiden Oberflächen. Ihr Betrag ist proportional zum Betrag der Normalkraft.



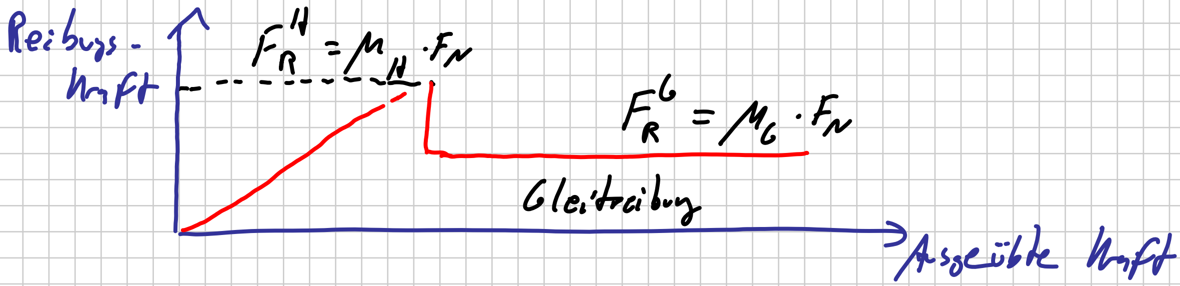
$$\boxed{\begin{aligned} F_R^H &\simeq \mu_H \cdot F_N \\ F_R^G &\simeq \mu_G \cdot F_N \end{aligned}}$$

[4-7]

μ_H ≙ Haftreibungskoeffizient

μ_G ≙ Gleitreibungskoeffizient

- Die Reibungskraft ist in erster Näherung unabhängig von der Größe der Kontaktfläche.



Die Haftreibung wirkt jeder ausgeübten Kraft bis zum Maximalwert entgegen, danach Gleitreibung.

Richtwerte für μ_H und μ_G

	μ_H	μ_G
Holz auf Holz	0,4	0,2
Stahl auf Stahl (ohne Fett)	0,7	0,6
Gummi auf trockenem Asphalt	0,9	0,85
Gummi auf nassem Asphalt	~0,5	~0,3
Gewachste Ski auf Schnee	0,1	0,05
Geschmiertes Kugellager	<0,01	<0,01

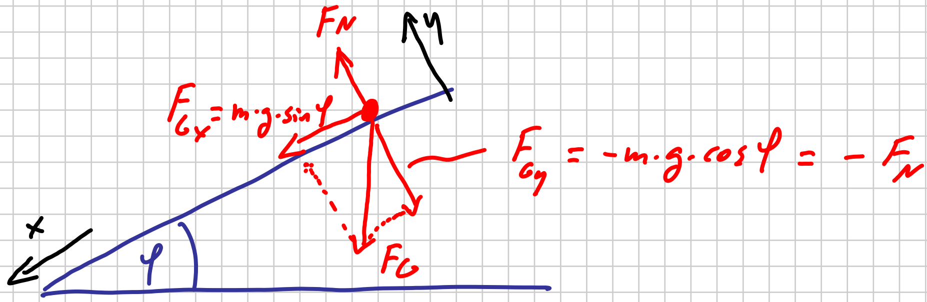
(Rollreibung $\mu_{roll} \sim 0,03$)

27.10.2010

Beispiel: Skiabfahrt, Neigung $= 30°$, $v_0 = 0$

Rutscht man von selbst?

Wähle günstiges Koordinatensystem:



$$\sum F_x = m \cdot g \cdot \sin\varphi - \mu_H \cdot F_N = m \cdot a$$

$$\Rightarrow \cancel{m} \cdot g \cdot \sin\varphi - \mu_H \cdot \cancel{m} \cdot g \cdot \cos\varphi = \cancel{m} \cdot a$$

$\Rightarrow$ Beschleunigung unabhängig von Masse

bei $\mu_H = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad a \sim 2 \, \frac{m}{s^2}$

(b) Reibung in Flüssigkeiten / Gasen

- Nicht zu großer Körper mit kleiner Geschwindigkeit (Stokes-Reibung)

$$\boxed{\begin{array}{l} F_R \propto v \\ \text{Kugel: } F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \end{array}}$$

[4-8]

mit η = Viskosität, Zähigkeit

- Bei schneller Bewegung (Newton-Reibung)

$$\boxed{\begin{aligned} F_R &\propto v^2 \\ F_R &= \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \end{aligned}}$$

[4-9]

c_w ≙ Widerstandsbeiwert, Strömungswiderstandskoeffizient

Kugel ~ 0,45 / PKW ~ 0,3–0,4 / stehender Mensch ~ 0,78

Tropfenform ~ 0,05 / Tragflügel ~ 0,08

ρ ≙ Dichte des Fluids in kg/m^3

$\rho_{Wasser} \sim 1000\ kg/m^3$ $\quad \rho_{Luft} \sim 1{,}2\ kg/m^3$ auf Meereshöhe

A ≙ Querschnittsfläche des Körpers senkrecht zu $\vec{v}$

↳ Für ein Objekt im freien Fall

$$m \cdot a = m \cdot g - \frac{1}{2} c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

↳ Es stellt sich eine maximale Geschwindigkeit („Endgeschwindigkeit") ein, wenn $m \cdot a = 0$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{c_w \cdot \rho \cdot A}}$$

(Einheitencheck: $\sqrt{\dfrac{kg \cdot m\ m^3}{s^2\ kg\ \ m^2}} \;\hat{=}\; \dfrac{m}{s}$)

Beispiele für Endgeschwindigkeit:

		95 % erreicht nach
Mensch	$60\ m/s \mathrel{\hat{=}} 220\ km/h$	$400\ m$
Basketball	$20\ m/s$	$50\ m$
Tischtennisball	$9\ m/s$	$10\ m$
Fallschirmspringer (mit Fallschirm)	$5\ m/s$	$3\ m$
Regentropfen	$7\ m/s$	$6\ m$

→ High Rise Syndrom in Cats

(VII) Gravitationskraft

Jedes Objekt mit einer Masse m_1 übt eine Anziehungskraft auf ein anderes Objekt mit der Masse m_2 im Abstand r aus:

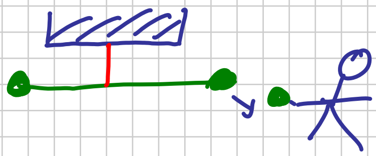
$$\boxed{\vec{F}_{12} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{r}_{12}/r}$$

[4-10]

oder skalar: $F_{12} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

mit $G =$ Gravitationskonstante $= 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

(überall gleich)

(Cavendish-Experiment )

$m\,(\text{Erde}) = 5{,}98 \times 10^{24}\ \text{kg}$

$r\,(\text{Erde}) = 6{,}37 \times 10^{6}\ \text{m}$

$$\curvearrowright \quad \frac{G \cdot m(\text{Erde})}{(r(\text{Erde}))^2} = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \mathrel{\hat{=}} g$$

$$\curvearrowright \quad F_{1,\text{Erde}} = m_1 \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

5. Energie und Arbeit

5.1 Kinetische Energie

Oft ist eine detaillierte Betrachtung aller Kräfte sehr komplex oder nicht möglich

$\curvearrowright$ Definiere eine neue, skalare Größe

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Kinetische Energie} \\ E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2\end{array}}$$

[5-1]

- gilt nur, wenn $v \ll c$ (Lichtgeschwindigkeit)
- E_{kin} immer ≥ 0
- „ableitbar" aus [2-3]

Die Einheit der Energie ist

$$1 \text{ Joule} = 1\,J = 1\,kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$$

Für sehr kleine Systeme ist die Einheit

$$1 \text{ Elektronvolt} = 1\,eV = 1{,}6 \times 10^{-19}\,J$$ praktischer.

(Diese kinetische Energie besitzt ein Elektron nach Durchlaufen einer Potenzialdifferenz von 1 Volt)

5.2 Arbeit

Der Austausch von Energie über eine Kraft nennt man Arbeit W („Work")

$$\boxed{W = \Delta E_{kin} = E_{kin}^{f} - E_{kin}^{i}} \qquad [5\text{-}2]$$

(a) Arbeit bei konstanter Kraft $\vec{F}$

Formel [2-3]: $v^2 = v_0^2 + 2 \cdot \vec{a}\,(\vec{s} - \vec{s}_0)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot v^2}_{E_{kin}^{f}} = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot v_0^2}_{E_{kin}^{i}} + \underbrace{m \cdot \vec{a}}_{\vec{F}}\,(\vec{s} - \vec{s}_0)$$

└ setze $\vec{s}_0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{s}} \qquad [5\text{-}3]$$

(„Arbeit ist Kraft mal Weg")

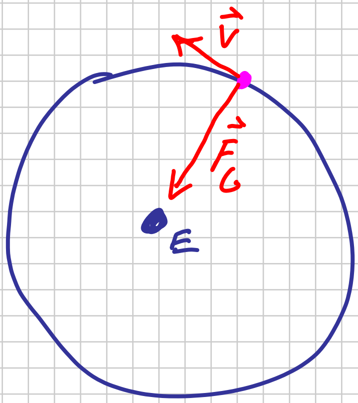
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \measuredangle (\vec{F}, \vec{s})$$

$$\Rightarrow W = 0 \quad \text{wenn} \quad \vec{F} \perp \vec{s}$$

└ senkrecht zu

- $W > 0$ ⇒ Energie wird zugeführt
  $\vec{F}$ hat Komponente in Richtung der Verschiebung $\vec{s}$
- $W < 0$ ⇒ Energie wird abgeführt
  $\vec{F}$ hat Komponente entgegen Richtung von $\vec{s}$

Beispiel: Verrichtet die Erde Arbeit am Mond?



$\vec{s}$ ist immer $\perp$ $\vec{F}$

⇒ NEIN

(b) Arbeit bei variabler Kraft $\vec{F}(\vec{s})$ 2.11.2010

Zerlege Verschiebung in kleinste Einzelschritte $\Delta\vec{s}_i$ auf denen die Kraft konstant ist:

$$\Rightarrow \quad W = \sum W_i = \sum \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$$

Für beliebig kleine $\Delta\vec{s}_i$ wird daraus ein Integral

$$\boxed{W = \int \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}} \qquad [5\text{-}4]$$

In kartesischen Koordinaten (x,y,z):

$$W = \int F_x \, dx + \int F_y \, dy + \int F_z \, dz$$

c) Arbeit durch Anheben / Absenken

- Arbeit durch Gravitationskraft

$$W_G = m \cdot g \cdot d \quad \text{(freier Fall, Absenken)}$$

$$W_G = -m \cdot g \cdot d \quad \text{(Wurf nach oben, Anheben)}$$

Beim freien Fall wird dem Objekt kinetische Energie zugeführt $\Rightarrow W_G > 0$

- Beim Anheben / Absenken (kein freier Fall) ist $E^f_{kin} = E^i_{kin}$

Kraft hält Objekt an einem Ort fest

$$\Rightarrow \Delta E_{kin} = W = 0 = W_G + W_A$$

$$\Rightarrow W_A = -W_G$$

- Falls $\vec{F}_G$ nicht parallel zur Verschiebung $\vec{d}$:

$$W_A = -W_G \cdot \cos \measuredangle(\vec{F}_G, \vec{d})$$

(i) Verschiebung vertikal nach oben

$(\measuredangle(\vec{F}_G, \vec{d}) = 180°)$

$\Rightarrow W_A = m \cdot g \cdot d$ (Energie wird zugeführt)

(ii) Verschiebung vertikal nach unten

$(\measuredangle(\vec{F}_G, \vec{d}) = 0°)$

$\Rightarrow W_A = -m \cdot g \cdot d$ (System gibt Energie ab)

(d) Arbeit durch Federkräfte

$$F_F = -k \cdot x$$

$$\Rightarrow W_F = \int_{x_i}^{x_f} F \cdot dx = \int_{x_i}^{x_f} -k \cdot x \, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{W_F = -\frac{1}{2} k \cdot (x_f^2 - x_i^2)} \qquad [5-5]$$

mit $x_i = 0 \Rightarrow W_F = -\frac{1}{2} k \cdot x^2$

- $W_F > 0$ wenn die Feder am Ende weniger gespannt ist
- $W_F < 0$ wenn die Feder am Ende mehr gespannt ist (z.B. Feder langziehen)

Beispiel: Feder beschleunigt Masse

Masse = 1 kg

Feder um 10 cm zusammengedrückt

Federkonstante $k = 300 \ N/m$

- Erforderliche Arbeit, um die Feder zusammenzudrücken

$$W = \frac{1}{2} \left(300 \frac{N}{m}\right) \cdot (0{,}1 \ m)^2 = 1{,}5 \ J$$

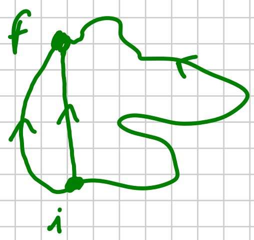
- Bei der Ausdehnung verrichtet die Feder eine Arbeit an der Masse $\Rightarrow E_{kin}(\text{Masse}) = W$

$$\Rightarrow E_{kin}(\text{Masse}) = \frac{1}{2} m v^2 = 1{,}5 \ J$$

$$\Rightarrow v = 1{,}73 \ m/s$$

5.3 Konservative und Nicht-Konservative Kräfte

(a) Die durch eine Konservative Kraft geleistete Arbeit hängt nicht vom Weg ab

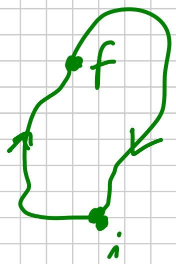


$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{unabhängig vom Weg}$$

$\Rightarrow$ Entlang eines geschlossenen Weges ist die Arbeit Null

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

geschlossenes Integral



Homogene Kräfte (z.B. Gravitationskraft nahe der Erdoberfläche) und radiale Kräfte $\vec{F} = f(r) \cdot \vec{e}_r$ (z.B. Federkraft) sind Konservativ.

(b) Nicht-Konservative (in der Regel dissipative) Kräfte sind wegabhängig.

z.B. Reibung, F_R wirkt immer entgegen der Verschiebung

$$\Rightarrow W = -\left(F_R \cdot x + F_R \cdot x\right) = -2 \cdot F_R \cdot x \neq 0$$

Hin- und Rückweg

5.4 Potenzielle Energie

Beim Hochheben eines Buches leistet man Arbeit, aber die kinetische Energie des Buches ist vorher und nachher gleich.

$\Rightarrow$ Arbeit steckt in Änderung der Anordnung

$\Rightarrow$ Potenzielle Energie

- Gravitation:

$$\Delta E_{pot}^{grav} = -\int_{y_i}^{y_f} (-mg)\, dy = m \cdot g \underbrace{(y_f - y_i)}_{\Delta y}$$

Nur die Änderung einer potenziellen Energie hat eine physikalische Bedeutung $\Rightarrow$ Nullpunkt frei wählbar

$$\Rightarrow \quad E_{pot}^{grav} = m \cdot g \cdot y$$

- Feder:

$$\Delta E_{pot}^{F} = -\int_{x_i}^{x_f} (-k \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{2} k \left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

Wähle Nullpunkt bei entspannter Feder

$$\Rightarrow \quad E_{pot}^{F} = \frac{1}{2} k x^2$$

- Durch die Wegunabhängigkeit der Arbeit bei konservativen Kräften kann jedem Punkt eine potenzielle Energie zugeordnet werden.

  Oft wählt man: $E_{pot}(\vec{r}_i) = 0$

$$\Rightarrow \quad E_{pot}(\vec{r}_f) = -W$$

5.5 Energieerhaltung bei konservativen Kräften

„Mechanische Energieerhaltung"

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \Big| \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{\cancel{dt}} \, \cancel{dt} = \int_{t_i}^{t_f} m \cdot \frac{d\vec{v}}{\cancel{dt}} \cdot \vec{v} \, \cancel{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{v_i}^{v_f} m \cdot \vec{v} \, d\vec{v} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

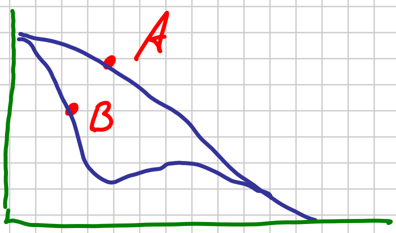
$$\Rightarrow -E_{pot}^f + E_{pot}^i = E_{kin}^f - E_{kin}^i$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{pot}^f + E_{kin}^f = E_{pot}^i + E_{kin}^i} \qquad [5-6]$$

Dies gilt nur für konservative Kräfte.

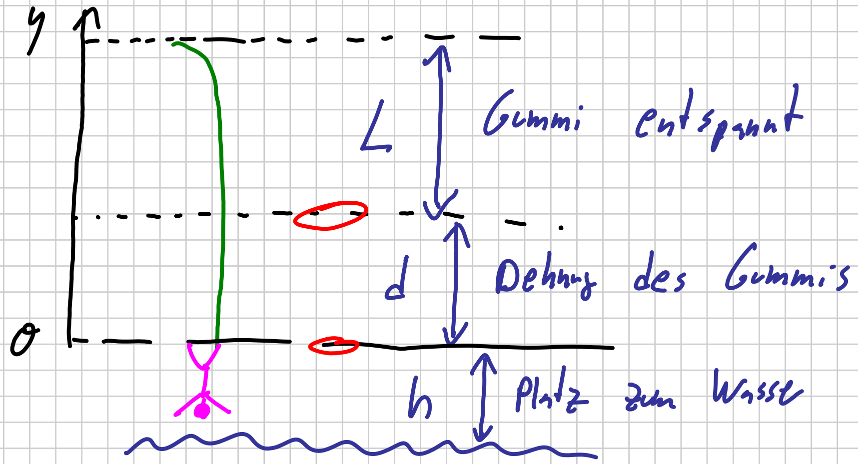
Die gesamte mechanische Energie eines Systems bleibt konstant.

Beispiel:



* Konservative Kräfte ?
  Ja (Reibung vernachlässigen)
* $E_{pot}^f(A) = E_{pot}^f(B) = E_{pot}^i - mgh$
* $E_{kin}^f(A) = E_{kin}^f(B) = \Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot h \Rightarrow v_A^f = v_B^f$
* B hat eher E_{pot} in E_{kin} umgewandelt
  $\Rightarrow v_B \geq v_A$

Beispiel: Bungee-Springer



$L = 25\,m$

$m = 55\,kg$

Federkonstante $k = 50\,N/m$

Keine Reibung

$$\begin{cases} E^i = E^i_{pot} + E^i_{kin} = m \cdot g\,(L + d) + 0 \\ E^f = E^f_{pot} + E^f_{kin} = \frac{1}{2} k \cdot d^2 + 0 \quad \leftarrow (v = 0 \text{ bei maximaler Auslenkung}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k d^2 - mg \cdot (L + d) = 0 \iff d^2 - \frac{m \cdot g \cdot 2}{k} \cdot d - \frac{m \cdot g \cdot L \cdot 2}{k} = 0$$

$$\Rightarrow d = 36\,m \qquad (d_2 = -15\,m) \qquad \text{Absprunghöhe} = 61\,m$$

5.6 Energieerhaltung bei dissipative Kräfte

3.11.2010

Bei nicht-konservativen Kräften (z.B. Reibung) bleibt die mechanische Energie nicht erhalten. Man muss jetzt die Gesamtenegie des Systems betrachten (inkls. z.B. Wärme)

$$\Delta E_{ges} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} + \Delta E_{int} = 0$$

ΔE_{int} ist die durch nicht-konservative Kräfte verrichtete Arbeit.

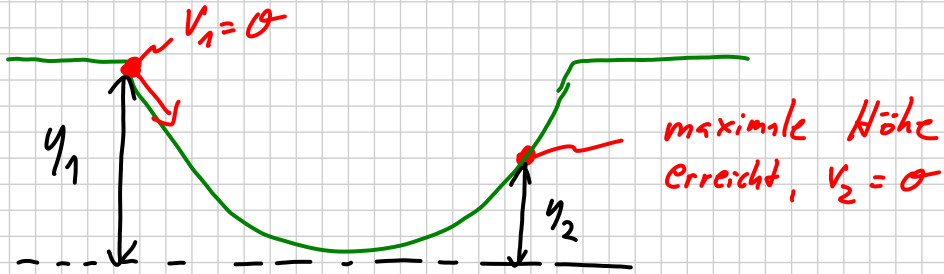
Beispiel:

$y_1 = 0{,}4\ m$

$y_2 = 0{,}2\,m$

Gesamtweg $= 2\,m$

$m = 0{,}1\ kg$



Annahme $F_R = const.$

$$\Rightarrow \cancel{E^i_{kin}} + E^i_{pot} = \cancel{E^f_{kin}} + E^f_{pot} + E_{Reibung}$$

$$\Rightarrow 0{,}1\,kg \cdot g \cdot 0{,}4\,m = 0{,}1\,kg \cdot g \cdot 0{,}2\,m + F_R \cdot 2\,m$$

$$\Rightarrow F_R = 0{,}1\ N$$

5.7 Zusammenhang zwischen Kraft und Potenzial

$$\boxed{E_{pot} = -\int \vec{F}\,d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} E_{pot}}$$

[5-5]

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{e}_z$$

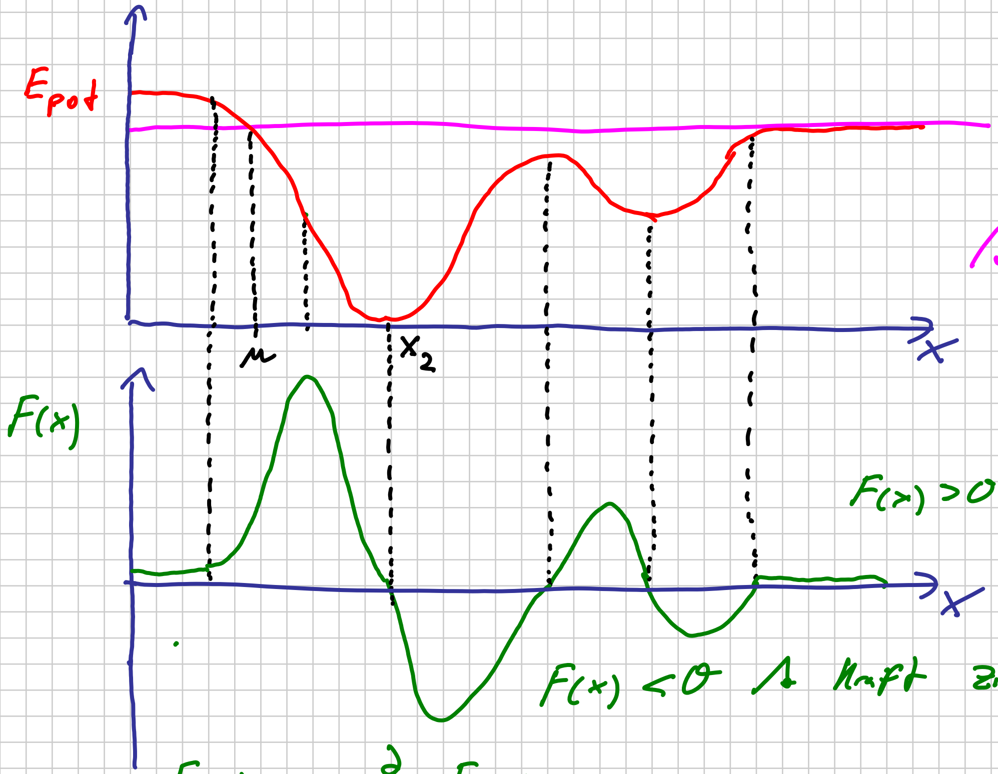
Nabla-Operator, Gradient

partielle Ableitungen

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial}{\partial x} E_{pot} \qquad F_y = -\frac{\partial}{\partial y} E_{pot} \qquad F_z = -\frac{\partial}{\partial z} E_{pot}$$

$\vec{\nabla} E_{pot}$ nennt man auch Gradient des Potenzials („grad")

(Aus einem Skalar wird ein Vektor)



$E_{mech} = E_{pot} + E_{kin}$

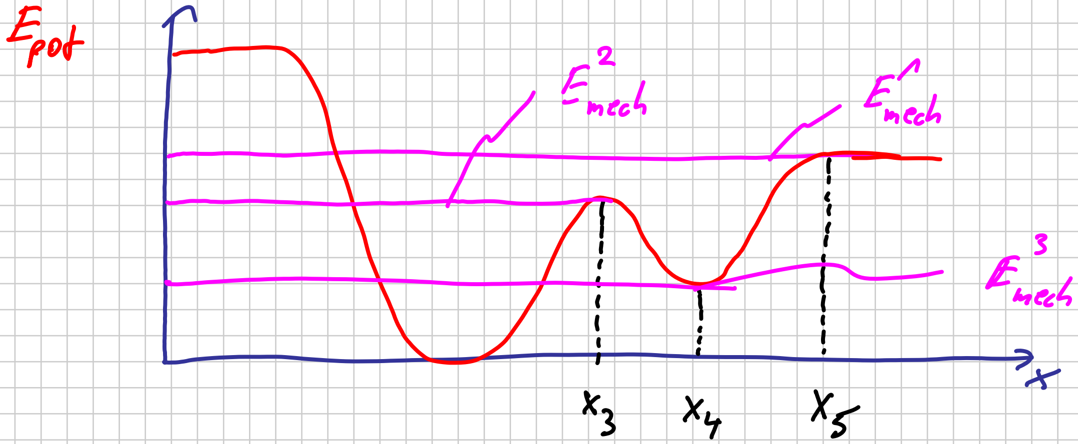
$\Rightarrow E_{kin}(\mu) = 0$

$\Rightarrow E_{kin}(x_2) = \text{maximal}$

$F(x) > 0 \Rightarrow$ Kraft zieht nach $+x$

$F(x) < 0 \Rightarrow$ Kraft zieht nach $-x$

$F(x) = -\frac{\partial}{\partial x} E_{pot}$



- E^1_{mech}, $x > x_5$ $\Rightarrow$ Neutrales Gleichgewicht (Kugel auf Tisch)
- E^2_{mech}, $x = x_3$ $\Rightarrow$ Labiles Gleichgewicht (Kugel auf Kugel)

  $E_{kin} = 0$ aber kleinste Änderung in x destabilisiert
- E^3_{mech}, $x = x_4$ $\Rightarrow$ Stabiles Gleichgewicht (Kugel in Mulde)

  rückstellende Kräfte, Teilchen bei x_4 gefangen

5.8 Leistung

Geschwindigkeit, mit der Arbeit verrichtet wird

Gemittelt über längeren Zeitraum $\overline{P} = \frac{W}{t}$ („Arbeit pro Zeit")

Instantan: $\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}}$ [5-6]

Leistung ≙ Rate der Energieumwandlung

Die Einheit der Leistung ist

$$1\,\text{Watt} = 1\,\text{W} = 1\,\text{J}/\text{s}$$

(veraltet: Pferdestärke 1 PS ≙ 735,5 W
seit 2010 auch als Zusatzinfo in der EU verboten)

- Ein PKW braucht Leistung, um zu beschleunigen und um Reibungswiderstände zu überwinden

Beispiel: $m = 1200\,\text{kg}$ $F_{R,\,total} = 600\,\text{N} = \text{const.}$

Beschleunigen von 90 km/h auf 110 km/h in 6 Sekunden

$\curvearrowright \quad \bar{a} = \left(30{,}6\,\frac{m}{s} - 25\,\frac{m}{s}\right)/6\,s = 0{,}93\,\frac{m}{s^2}$

$\curvearrowright \quad F_{benötigt} = m \cdot \bar{a} + F_{R,\,total} = 1716\,\text{N}$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\vec{F}\cdot\vec{s})}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$\curvearrowright$ Maximale erforderliche Leistung

$$P_{max} = 1716\,\text{N} \cdot 30{,}6\,\frac{m}{s} = 5{,}3 \times 10^4\,\text{W} \;\hat{=}\; 71\,\text{PS}$$

(nur etwa 70 % auf Räder $\curvearrowright$ ~ 100 PS)