Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Problem Sei A eine quadratische Matrix vom Typ (m,m). Die Aufgabe, eine Zahl λ und einen dazugehörigen Vektor $\vec{x} \neq 0$ zu finden, damit

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{1}$$

ist, nennt man Eigenwertproblem. Die Zahl λ bezeichnet man dabei als Eigenwert und ist eine komplexe oder reelle Zahl. Bei Trägheitstensoren sind dies die Trägheitsmomente der Hauptträgheitsachsen und immer reell.
Den Vektor $\vec{x}$ bezeichnet man als Eigenvektor, wobei auch $c\vec{x}$ ein Eigenvektor ist. Definitionsgemäß ist der Nullvektor kein Eigenvektor. Bei Trägheitstensoren sind die Eigenvektoren die Hauptträgheitsachsen.

Lösung Zu Lösen ist Gleichung 1. Diese ist äquivalent zu

$$\mathbf{A}\vec{x} - \lambda\vec{x} = 0 \tag{2}$$

Für $x \neq \vec{0}$ muss dann gelten:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{3}$$

Dabei ist E die Einheitsmatrix. Um also die Eigenwerte zu bestimmen, muss die obige Gleichung gelöst werden.
Um zu einem Eigenwert λ den zugehörigen Eigenvektor $\vec{x}$ zu bestimmen, muss die Gleichung

$$(A - \lambda E)\vec{x} = 0 \tag{4}$$

gelöst werden. Dies wurde bereits in den Rechenmethoden behandelt.

Beispiel Gegeben sei die Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Setzt man den Ausdruck für **A** in Gleichung 3 ein, erhält man:

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{6}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung

$$(5-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(1-\lambda) = 0 \tag{7}$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 1$.
Mit Hilfe von Gleichung 4 erhält man die Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \vec{x_1} = 0 \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x_2} = 0 \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x_3} = 0 \tag{10}$$

Ein möglicher Satz von Eigenvektoren lautet daher $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Sie können genauso bei nicht-diagonalen Matrizen verfahren.