

Bestimmung von Hauptträgheitsachsen und ihren Hauptträgheitsmomenten

Gegeben sei ein 3x3 Trägheitstensor $\mathbf{I}$ von der Form

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Entsprechend der Vorlesung ist der Drehimpuls $\vec{L}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ über die Beziehung

$$\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega} \quad (2)$$

verknüpft.

Denken Sie sich nun als Beispiel einen Zylinder, dessen Symmetrieachse mit der z-Achse zusammenfällt (siehe Skizze). In diesem Falle nimmt der Trägheitstensor eine sehr einfache Form an, indem alle Elemente, die nicht auf der Nebendiagonalen liegen gleich Null werden $I_{xy} = I_{xz} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zx} = I_{zy} = 0$. Ist dies der Fall, so sind die Koordinatenachsen die sog. Hauptträgheitsachsen. Betrachtet man Rotationen um die Koordinatenachsen $\vec{\omega} = \omega \mathbf{e}_x, \omega \mathbf{e}_y, \omega \mathbf{e}_z$, so sind die Diagonaleinträge I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} die Trägheitsmomente.

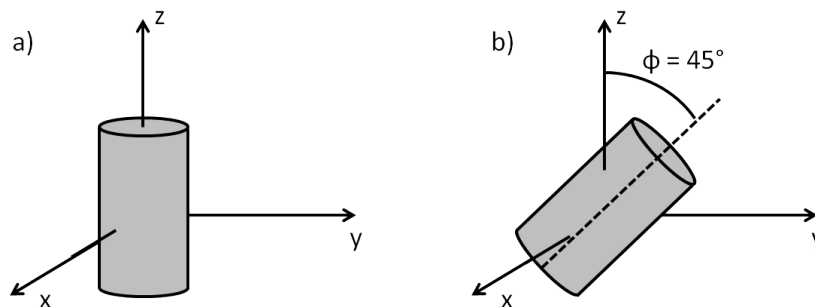


Abbildung 1: Ein Zylinder in einem kartesischen Koordinatensystem. Im Fall von a) fallen die Hauptträgheitsachsen mit den Koordinatenachsen zusammen so dass der Trägheitstensor diagonal ist. Wird der Zylinder um 45° gedreht ist der Trägheitstensor nicht mehr diagonal. Durch eine geeignete Koordinatentransformation (Diagonalisierung) nimmt der Trägheitstensor in einem anderen Koordinatensystem wieder Diagonalgestalt an.

Stellen Sie sich nun vor, dass der Zylinder in der yz-Ebene um den Winkel $\phi = 45^\circ$ gedreht wird. Dann nimmt der Trägheitstensor bezüglich des alten Koordinatensystems nicht mehr Diagonalgestalt an, da die Hauptträgheitsachsen nicht mehr mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Man kann jedoch ein Koordinatensystem finden, indem der Trägheitstensor wieder Diagonalgestalt hat (in diesem Fall einfach das um $\phi = 45^\circ$ um

die x-Achse gedrehte Koordinatensystem). Diese Koordinatentransformation wird als Diagonalisierung bezeichnet. Die Koordinatenachsen dieses neuen Koordinatensystems sind dann wiederum die Hauptträgheitsachsen.

Ziel soll es nun sein, für einen gegebenen Trägheitstensor, der in einem Koordinatensystem O gegeben ist, die Hauptträgheitsachsen und die zugehörigen Trägheitsmomente zu finden. Die Bedingung, dass eine Achse Hauptträgheitsachse ist, ist dass der Drehimpuls bei einer Rotation um eine Hauptträgheitsachse parallel zum Drehimpuls ist. (Andere Rotationen sind nicht stabil, d.h. es würde ein Drehmoment und damit eine Drehimpulsänderung geben.) Mathematisch lässt sich diese Bedingung formulieren als:

$$\mathbf{I} \cdot \vec{\omega} = \vec{L} = \lambda \vec{\omega} \quad (3)$$

oder anders formuliert:

$$\mathbf{I} \cdot \vec{\omega} - \lambda \vec{\omega} = 0 \quad (4)$$

Diese Gleichung hat für den Fall eines 3x3-Trägheitstensors drei Lösungspaare (λ_i, ω_i) , welches die Trägheitsmomente und Hauptträgheitsachsen sind.

Zur Lösung von (4) kann man die folgt vorgehen: Für $\vec{\omega} \neq 0$ muss gelten:

$$C(\lambda) := \det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \quad (5)$$

wobei $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix darstellt. $C(\lambda)$ ist dann ein Polynom 3. Grades und somit sind die Trägheitsmomente λ die Nullstellen dieses Polynoms. Durch Bestimmung dieser Nullstellen sind also bereits die Trägheitsmomente gefunden.

Es bleiben also noch die Hauptträgheitsachsen zu bestimmen. Definitionsgemäß ist $\vec{\omega}_i$ eine Hauptträgheitsachse mit dem Trägheitsmoment λ_i , wenn

$$(\mathbf{I} - \lambda_i \mathbf{E}) \vec{\omega}_i = 0 \quad (6)$$

gilt. Schreibt man diese Gleichung mit den Komponenten von $\vec{\omega}_i$ explizit aus, erhält man ein 3-dimensionales Gleichungssystem für die unbekannten Komponenten von $\vec{\omega}_i$. Durch lösen dieses Gleichungssystems für alle drei Trägheitsmomente erhält man die Hauptträgheitsachsen.

Beispiel Dies soll nun anhand eines Beispiels verdeutlicht werden. Gegeben sei ein Trägheitstensor:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Setzt man den Ausdruck für $\mathbf{I}$ in Gleichung (5) ein, erhält man das Polynom:

$$C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\Rightarrow C(\lambda) = (5 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) \quad (9)$$

Dieses Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Damit sind die Trägheitsmomente für Rotationen um die Hauptträgheitsachsen bestimmt.

Damit bleiben noch die Lage der Hauptträgheitsachsen selbst zu bestimmen. Mit Hilfe von Gleichung (6) erhält man für die erste Nullstelle $\lambda_1 = 5$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{1,1} \\ \omega_{1,2} \\ \omega_{1,3} \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

mit $\omega_{1,i}$ den Komponenten von $\vec{\omega}_1$. Durch explizites ausrechnen erhält man, dass $\omega_{1,1}$ beliebig, und $\omega_{1,2} = \omega_{1,3} = 0$ ist. Generell gilt, dass mit $\vec{\omega}$ auch $c \cdot \vec{\omega}$ eine Hauptträgheitsachse ist, so dass bei der Bestimmung einer Hauptträgheitsachse immer eine Komponente frei wählbar ist. Diese kann z.B. durch Normierung bestimmt werden.

Durch analoge Rechnung erhält man auch die anderen Hauptträgheitsachsen. Für dieses Beispiel wäre $\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{\omega}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Satz von Hauptträgheitsachsen mit den Trägheitsmomenten λ_1 , λ_2 und λ_3 .

Anmerkung Formal ist Gleichung 4 ein Eigenwertproblem. Jede lineare Abbildung

$$f : V \rightarrow W \quad (11)$$

zwischen zwei Vektorräumen V und W lässt sich durch eine Matrix A darstellen, sodass

$$x \rightarrow f(x) = A \cdot x \quad (12)$$

gilt. Besondere Bedeutung kommt denjenigen Vektoren x zu, bei denen sich die Abbildungsvorschrift (12) zu einer Multiplikation mit einer Zahl vereinfacht:

$$x \rightarrow A \cdot x = \lambda x \quad (13)$$

Die Zahlen λ und Vektoren x heißen dann die Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix A . In dem oben beschriebenen Fall sind die Trägheitsmomente und die Hauptträgheitsachsen die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren des Trägheitstensors. Das Polynom $C(\lambda)$ in Gleichung (5) ist das sog. charakteristische Polynom der Matrix A . Im allgemeinen können die Nullstellen komplexe Zahlen sein, im Fall von Trägheitstensen sind die Eigenwerte und damit die Trägheitsmomente jedoch als physikalische Observablen immer reelle Zahlen.

Eigenwerte und Eigenvektoren sind wichtige Konzepte der Mathematik, die auch Anwendungen in der Physik finden. Beispielsweise sind die Energiewerte eines quantenmechanischen Systems die Eigenwerte des Hamilton-Operators. Weitere Informationen zu Eigenwerten und Eigenvektoren finden sich in einschlägigen Lehrbüchern der linearen Algebra.